

Bemerkungen zur Stabilisierung eines physikalischen Pendels. I

Von *Wolfhart Haacke* in Braunschweig

Es werden die Stabilisierungsmöglichkeiten eines im Aufhängepunkt vertikal periodisch erschütterten Pendels gesucht. Es wird gezeigt, daß bei Betrachtung des Pendels als starren Körper nur die normale Gleichgewichtslage und die um π verschobene Lage stabil sein können, während bei Berücksichtigung der Elastizität sich eine schräge stabilisierte Lage ergibt.

The author investigates the possibilities of stabilizing a pendulum that is periodically disturbed by shocks acting vertically at the point of suspension. If the pendulum is considered a rigid body, only the usual position of equilibrium and the opposite position prove stable, while, taking account of the elasticity, an oblique stable position is resulting.

Les possibilités sont discutées de stabiliser un pendule poussé dans son point de suspension verticalement et périodiquement. L'auteur montre, que le pendule considéré comme corps rigide n'a aucune position d'équilibre que sa position normale et celle déplacée par π ; en tenant compte de l'élasticité on obtient une position oblique.

В работе исследуются возможности стабилизации маятника, подвергающегося в точке подвеса вертикальным периодическим сотрясениям. Если маятник рассматривать как твердое тело, то устойчивым может быть только нормальное положение равновесия или положение, диаметрально противоположное первому. При учете упругости маятника устойчивым оказывается наклонное положение.

1. Aufgabenstellung

Wenn ein physikalisches Pendel in seinem Aufhängepunkt vertikal periodisch erschüttert wird, so ergeben sich zusätzliche Gleichgewichtslagen. Diese Erscheinungen sind in mehreren Arbeiten untersucht worden: [1] bis [9]¹⁾. Im wesentlichen wollen wir an die Arbeiten von Erdélyi [2] und Klotter [4] anknüpfen.

Nach Klotter ergibt sich für eine gewisse (kritische) Erschütterungsfrequenz eine Stabilisierung des Pendels in der oberen — sonst labilen — Lage, die mit wachsender Erschütterungsfrequenz erhalten bleibt; Erdélyi erhält dieselbe kritische Frequenz, doch folgert er auf Grund seiner Theorie, daß sich mit wachsender Erschütterungsfrequenz die Gleichgewichtslage immer mehr der horizontalen Lage nähert. Es soll im folgenden unter anderen gezeigt werden, daß diese Aussagen Spezialfälle der allgemeinen Erscheinungen beschreiben.

Wir betrachten das in Bild 1 skizzierte Pendel. Seine Bewegungsgleichung lautet

$$\Phi'' + \left(\frac{A}{l} \cos u - \frac{g}{4\pi^2 n^2 l} \right) \sin \Phi = 0 \quad (1).$$

Dabei ist l die reduzierte Pendellänge, $u = 2\pi nt$ die unabhängige Veränderliche, t die Zeit, g die Erdbeschleunigung und $\eta = A \cdot \cos 2\pi nt$ die Erschütterungsfunktion.

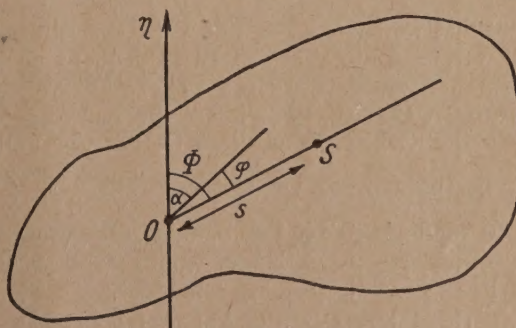


Bild 1

2. Notwendige Bedingung für Gleichgewichtslagen in den oberen Quadranten

Wir wollen zunächst nach der Existenz kleiner (beschränkter, aber nicht notwendig periodischer) Schwingungen um eine Mittellage α fragen. Diese Mittellage werde durch

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \quad (2)$$

¹⁾ Die Zahlen [] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

definiert. Notwendige Bedingung für die Stabilisierung des Pendels ist, daß die linearisierte Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen beschränkte Lösungen aufweist. Mit $\Phi = \alpha + \varphi$ bei $|\varphi| \ll \frac{\pi}{2}$ ergibt sich aus (1):

$$\varphi'' + \left(\frac{A}{l} \cos u - \frac{g}{4\pi^2 n^2 l} \right) \cos \alpha \cdot \varphi = \left(\frac{g}{4\pi^2 n^2 l} - \frac{A}{l} \cos u \right) \sin \alpha \quad (3).$$

Es läßt sich sofort die Partikularlösung der inhomogenen Differentialgleichung (3) $\varphi_P = -\operatorname{tg} \alpha$ angeben, d. h. also, es ist φ_P eine Konstante, und zwar für den zunächst zu betrachtenden oberen Halbkreis $0 \leq |\alpha| \leq \delta < \frac{\pi}{2}$. Nach dieser Bemerkung kann die Untersuchung auf die homogene Gleichung

$$\varphi'' + \left(-\frac{g \cos \alpha}{4\pi^2 n^2 l} + \frac{A}{l} \alpha \cos \cdot \cos u \right) \varphi = 0 \quad (3)_h$$

beschränkt werden, eine Mathieusche Gleichung, die wir durch $-\frac{g \cos \alpha}{4\pi^2 n^2 l} = \lambda$, $\frac{A}{l} \cos \alpha = \gamma$ in die Normalform $\varphi'' + (\lambda + \gamma \cos u) \varphi = 0$ überführen. Die Beschränktheit der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von λ, γ ist ausführlich untersucht worden [10], S. 40. Wir können sie nach Strutt graphisch (Bild 2) in einer λ, γ -Ebene darstellen. Für unsere Fragestellung ist $\cos \alpha > 0$, also $\lambda < 0$ und $\gamma > 0$. Wir haben daher die Verhältnisse im zweiten Quadranten der λ, γ -Ebene zu untersuchen. Die einfach-schraffierten Bereiche enthalten Parameter, denen zwei unabhängige beschränkte Lösungen zugeordnet sind. Die Grenzkurven „enthalten“

eine periodische und eine unbeschränkte Lösung, sie gehören also noch zum instabilen Bereich. Die analytische Darstellung der Grenzkurven entnehmen wir aus Jahnke-Emde [11]. Nach Umrechnung der Parameter erhalten wir für

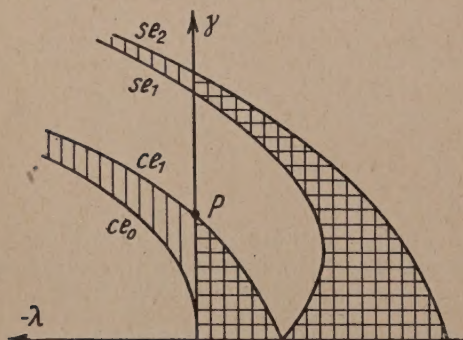


Bild 2

$$\left. \begin{aligned} ce_0: \lambda_{ce_0} &= -\frac{\gamma^2}{2} + \frac{7}{32} \gamma^4 - \frac{29}{144} \gamma^6 + \dots \\ ce_1: \lambda_{ce_1} &= \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{8} + \frac{\gamma^3}{32} - \frac{\gamma^4}{384} + \dots \\ se_1: \lambda_{se_1} &= \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{8} - \frac{\gamma^3}{32} - \frac{\gamma^4}{384} - \dots \\ se_2: \lambda_{se_2} &= 1 - \frac{\gamma^2}{12} + \frac{5}{3456} \gamma^4 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (4).$$

Zunächst wollen wir uns mit Hilfe des Bildes 2 einen groben Überblick verschaffen. Wenn wir bei festem A die Erschütterungsfrequenz des Pendels erhöhen, so bewegen wir uns in der λ, γ -Ebene auf einer Geraden $\gamma = \text{konstant}$ von links nach rechts. Zunächst befinden wir uns im instabilen Bereich, bis wir auf die Kurve ce_0 stoßen. Wir gelangen nur dann nochmals in ein instabiles Gebiet, wenn diese Gerade oberhalb P die γ -Achse schneidet. Den Punkt P wollen wir bestimmen. Es ist dort ungefähr $\frac{\gamma^2}{8} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4} = 0$, also $\frac{A}{l} \cos \alpha = \gamma \approx 0,449$. Selbst für $\alpha = 0$ muß $A = 0,449 l$ sein, d. h. die gesamte Erschütterungsstrecke $2A$ ist fast so lang wie die reduzierte Pendellänge, während für $\alpha > 0$ A noch größer sein müßte, damit die Gerade im Punkte P die γ -Achse schneidet.

Uns interessiert die Abhängigkeit der Lösungen von $1/n^2$ und $\cos \alpha$. Daher bilden wir die Parameterebene durch $x = -\frac{4\lambda}{\gamma} = \frac{g}{\pi^2 A n^2}$ und $y = \frac{A}{l} \cos \alpha$ auf die x, y -Ebene ab. Diese Abbildung ist für $\cos \alpha \neq 0$ eindeutig. Dann ergibt sich aus (4):

$$\begin{aligned} x_{ce_0} &= 2y - \frac{7}{8} y^3 + \frac{29}{36} y^5 + \dots & x_{se_1} &= -\frac{1}{y} - 2 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{96} - \dots \\ x_{ce_1} &= -\frac{1}{y} + 2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{96} + \dots & x_{se_2} &= -\frac{4}{y} + \frac{y}{3} - \frac{5}{864} y^3 + \dots \end{aligned}$$

Zur graphischen Darstellung in Bild 3 benutzen wir aber an Stelle dieser Näherungsreihen die von Ince berechneten Tafeln [12]. Mit den dortigen Bezeichnungen ist $x = -\frac{a}{4q}$ und $y = 4q$.

Zur Stabilität unseres Pendels ist $x > 0$ und $y > 0$ notwendig, weiter müssen in Frage kommende Punkte unterhalb der Horizontalen $y = \frac{A}{l}$ liegen. Wir beschränken uns jetzt auf $\frac{A}{l} < 0,44$, so daß unsere Horizontale die y -Achse unterhalb von ce_1 schneidet. Die Verhältnisse für große A/l kann man ebenfalls leicht überblicken. Sie sollen im weiteren nicht mehr betrachtet werden.

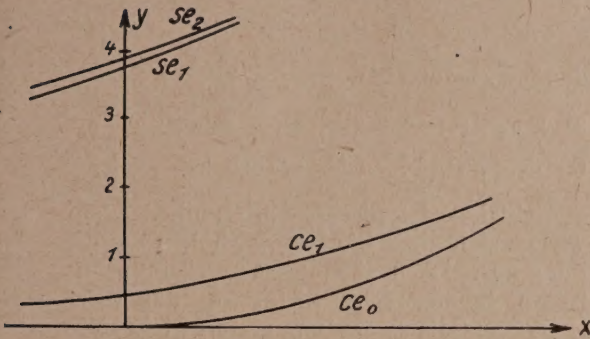


Bild 3

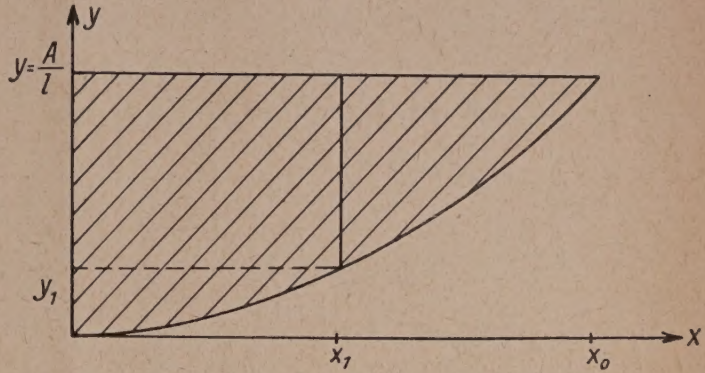


Bild 4

Der schraffierte Bereich in Bild 4 stellt stabile Verhältnisse für ein festes A dar. Der Punkt $x_0 = \frac{g}{\pi^2 l} \frac{1}{n_0^2}$ bestimmt die kritische Frequenz n_0 , bei der das Stabilisierungsphänomen für $\alpha = 0$ beginnt. Zu einem Punkt $x_1 < x_0$, d. h. $n_1 > n_0$, erhält man ein Stabilisierungsintervall. Es ergeben sich also kleine Schwingungen um alle Lagen α mit $0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = \arccos \frac{y_1 l}{A}$. n_0 bestimmt sich in erster Näherung aus $x_0 = 2 \frac{A}{l} = \frac{g}{\pi^2 A} \frac{1}{n_0^2}$, also $n_0 = \frac{\sqrt{2gl}}{2\pi A}$. Dies ist auch der von Klotter und Erdélyi gefundene Wert. Erdélyi fragt nach einer periodischen Lösung und erhält daher ce_0 , also die untere Grenzkurve unseres Bereichs. Diese Kurve gehört als Grenz- noch zum Instabilitätsbereich; stabile Lagen ergeben sich aber beliebig nahe oberhalb ce_0 . Klotter [4] fragt von vornherein nur nach Stabilität für $\alpha = 0$ und erhielt daher die Gerade $y = \frac{A}{l}$ für $x_0 \geq x > 0$. Aus Bild 3 ersehen wir, daß diese Gerade zum Stabilitätsbereich gehört. Es ist aber nach unseren bisherigen Ergebnissen auch jede Lage zwischen der Klotterschen Geraden und der Erdélyischen Kurve möglich, so daß wir von einem indifferenten Bereich sprechen müßten. Allerdings haben wir dabei bisher die Reibung und die Elastizität des Pendels sowie die Bedeutung der Mittellage und den Einfluß der Anfangsbedingungen noch nicht in unsere Betrachtungen einbezogen. Das soll später nachgeholt werden, vorher aber wollen wir noch einiges sagen über die

3. Gleichgewichtslagen in den unteren Quadranten

Es sei $\beta = \pi - \alpha$, $\Psi = \pi - \Phi = \beta + \psi$. Statt (1) ergibt sich für Ψ

$$\Psi'' + \left(\frac{g}{4\pi^2 n^2 l} - \frac{A}{l} \cos u \right) \sin \Psi = 0 \quad \dots \dots \dots (1)^*$$

und entsprechend

$$\psi'' + \left(\frac{g \cos \beta}{4\pi^2 n^2 l} - \frac{A}{l} \cos \beta \cos u \right) \psi = 0 \quad \dots \dots \dots (3)^*.$$

Also ist $\lambda = \frac{g \cos \beta}{4\pi^2 n^2 l} > 0$, $\gamma = -\frac{A}{l} \cos \beta < 0$.

Wir müssen jetzt die Verhältnisse im vierten Quadranten der λ, γ -Ebene untersuchen. Da die „Struttsche Karte“ zur λ -Achse symmetrisch ist, können wir uns auf den ersten Quadranten beschränken und dabei mit (4) und Bild 2 arbeiten. Uns interessieren jetzt die doppelt-schraffierten Bereiche des Bildes 2. Da $\lambda > 0$ und $\gamma > 0$ ist, müssen wir wegen $x = \frac{4\lambda}{\gamma}$ und $y = \gamma$ in der x, y -Ebene den zweiten Quadranten betrachten (Bild 3). Man sieht leicht ein, daß für alle

ce_p , se_p ($\nu > 0$) die negative x -Achse Asymptote ist. Jede Gerade $= y \frac{A}{l}$ schneidet also für hinreichend kleines n alle diese Kurven, so daß — wie bekannt — Stabilitätsbereiche mit Instabilitätsbereichen abwechseln. Auch hier (Bild 5) wollen wir nur den Fall

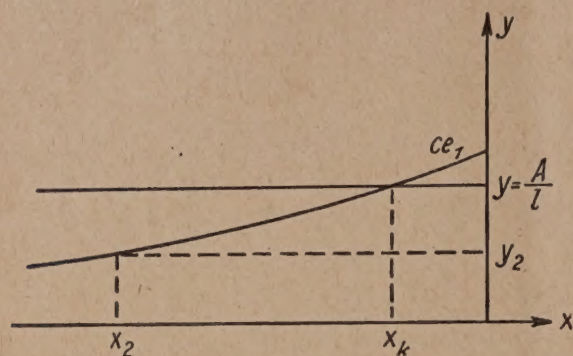


Bild 5

$\frac{A}{l} < 0,44$ diskutieren. Dann wäre nach dieser notwendigen Bedingung für $|x| < |x_k|$ das ganze Intervall $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ stabil. Ist aber $x_2 < x_k$, so ergibt sich Stabilität für $0 < \beta_2 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$. Die natürliche Gleichgewichtslage ist nicht mehr stabil. Analog wirken sich dann die Kurven höherer Ordnung aus. Doch für diese Erscheinungen ist n schon recht klein, so daß die experimentelle Bedeutung geringer ist. Für

sehr große n ist jedenfalls die untere Lage, wie auch Klotter [4] angibt, stabil.

4. Die Auswirkung der Reibung

Bei Berücksichtigung einer geschwindigkeitsproportionalen Reibung gilt statt (1)

$$\Phi'' + 2\kappa\Phi' + \left(\frac{A}{l} \cos u - \frac{g}{4\pi^2 n^2 l}\right) \sin \Phi = 0 \quad ^2).$$

Analog ergibt sich für (3):

$$\varphi'' + 2\kappa\varphi' + \left(\frac{A}{l} \cos u - \frac{g}{4\pi^2 n^2 l}\right) \cos \alpha \cdot \varphi = \left(\frac{g}{4\pi^2 n^2 l} - \frac{A}{l} \cos u\right) \sin \alpha.$$

Weiter ist $\varphi_P = -\operatorname{tg} \alpha$. Die homogene Gleichung lautet also:

$$\varphi'' + 2\kappa\varphi' + \left(\frac{A}{l} \cos u - \frac{g\kappa}{4\pi^2 n^2 l}\right) \cos \alpha \cdot \varphi = 0.$$

Mit $\varphi = e^{-\kappa u} \cdot \eta(u)$ erhalten wir

$$\eta'' + \left[-\left(\kappa^2 + \frac{g \cos \alpha}{4\pi^2 n^2 l}\right) + \frac{A}{l} \cos \alpha \cdot \cos u\right] \eta = 0.$$

Im oberen Quadranten mit $\cos \alpha > 0$ ist $\lambda = -\left(\kappa^2 + \frac{g \cos \alpha}{4\pi^2 n^2 l}\right)$ und $\gamma = \frac{A}{l} \cos \alpha$.

Wir befinden uns also wieder im zweiten Quadranten der λ, γ -Ebene. Jetzt benutzen wir die Abbildung $x = -4 \frac{\lambda + \kappa^2}{\gamma}$, $y = \gamma$. Dann erhalten wir wieder $x = \frac{g}{\pi^2 A n^2}$, $y = \frac{A}{l} \cos \alpha$, also die alte Abhängigkeit. Aus

$$\lambda_{ce_0} = -\frac{\gamma^2}{2} + \frac{7}{32} \gamma^4 - \dots$$

ergibt sich jetzt

$$x_{ce_0} = -\frac{4\kappa^2}{y} + 2y - \frac{7}{8} y^3 + \frac{29}{36} y^5 - \dots$$

und analog

$$x_{ce_1} = -\frac{4\kappa^2 + 1}{y} + 2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{96} + \dots$$

$$x_{se_1} = -\frac{4\kappa^2 + 1}{y} - 2 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{96} - \dots$$

$$x_{se_2} = -4 \frac{\kappa^2 + 1}{y^2} + \frac{y}{3} - \frac{5}{863} y^3 + \dots$$

²⁾ Dabei ist 2κ der Reibungskoeffizient.

Das Bild 3 ändert sich also etwas: Alle Kurven werden um einen kleinen Betrag gehoben. oe_0 schneidet die y -Achse etwa in

$$y = \sqrt{\frac{8}{7}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{7}{2} x^2}} \approx \sqrt{2} x.$$

Doch diese Aussagen gelten für η . Wegen $\varphi = e^{-\mu u} \eta(u)$ wird beiderseits der Bereich erweitert, im Prinzip aber hiernach die Erscheinung des „indifferenten Stabilitätsbereiches“ durch die Reibung nicht beeinflusst.

5. Die möglichen Mittellagen beim starren Körper

Wir haben in (2) als Mittellagen

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau$$

definiert. Diese Definition ist mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\tau) d\tau = 0$$

gleichwertig. Als Lösung von (3) ergibt sich nach dem Floquetschen Theorem [10], S. 57:

$$\varphi = -\operatorname{tg} \alpha + c_1 e^{\mu u} f(u) + c_2 e^{-\mu u} f(-u).$$

Dabei sind c_1 und c_2 die Integrationskonstanten, μ ist der charakteristische Exponent, der für beschränkte Lösungen rein imaginär sein muß. Daher setzen wir mit reellem ν $\mu = i\nu$. Es ist $f(u) = f(u + 2\pi)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi &= -\operatorname{tg} \alpha + c_1 e^{i\nu u} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} a_{\kappa} e^{i\kappa u} + c_2 e^{-i\nu u} \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} a_{\kappa} e^{-i\kappa u} \\ &= -\operatorname{tg} \alpha + \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa u} [c_1 a_{\kappa} e^{i\nu u} + c_2 a_{-\kappa} e^{-i\nu u}]. \end{aligned}$$

Also muß

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa u} [c_1 a_{\kappa} e^{i\nu u} + c_2 a_{-\kappa} e^{-i\nu u}] du$$

sein. Da wir $\sum a_{\kappa}^2 < C$ voraussetzen können, ist Summation und Integration vertauschbar. Wir erkennen, daß nur für ganzzahlige ν eine von Null verschiedene linke Seite sich ergibt. Denn dann wäre

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \left\{ (c_1 + c_2) a_{-\nu} u + \int_0^u \Sigma' du \right\} = (c_1 + c_2) a_{-\nu}.$$

Hiernach wäre also für ganzzahlige ν die Lage innerhalb des indifferenten Bereichs nur von den Anfangsbedingungen abhängig. Doch dieser Schluß ist nicht richtig. Ist $\mu = ni$ (n ganz), so ist $\varphi(u + 2\pi) = e^{2\pi in} \varphi(u) = \varphi(u)$. Eine Lösung ist also periodisch, die zweite daher nicht beschränkt. Der Fall $\mu = ni$ muß also für unsere Betrachtungen ausgeschlossen werden. Dann ist, falls die Lösung von (3) beschränkt ist, immer $\operatorname{tg} \alpha = 0$. Wir erhalten nur die von Klotter angegebene Lage.

6. Die Elastizität des Pendelkörpers

Wir wollen nun den Einfluß der Elastizität im Spezialfall des mathematischen Pendels untersuchen³⁾. Dazu betrachten wir einen durch eine Federkraft biegesteif an den Aufhängepunkt gebundenen Massenpunkt m . R sei die Länge des ruhenden Pendels ohne Einfluß der Schwerkraft $m \cdot g$, d. h. bei entspannter Feder (Bild 6). Ist r die augenblickliche Länge des Pendels und Φ der Winkel gemäß Bild 1, so beträgt zunächst beim Fehlen einer Erschütterung die potentielle Energie dieses mathematischen Pendels $U = \frac{\rho}{2} (R - r)^2 + mgr \cos \Phi$. Dabei ist ρ die Federkonstante. Die Werte für r und Φ , für die das Potential $U(r, \Phi)$ zum Minimum wird, sind die Koordinaten der Tiefpunkte von „Potentialmulden“, in denen Stabilität vorliegt⁴⁾. Es ist

$$U_r = \rho (r - R) + mg \cos \Phi = 0, \quad U_{\Phi} = -mgr \sin \Phi = 0,$$

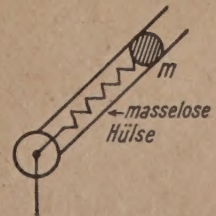


Bild 6

³⁾ Die Anregung zu dieser Untersuchung verdanke ich Herrn Prof. Dr. R. Weyrich.

⁴⁾ Der Stabilitätsbegriff ist in der Elastizitätstheorie noch nicht vollständig untersucht. Wir wollen hier diese einfache Definition wählen, deren Folgerungen mit den Experimenten im Einklang stehen.

und die Diskriminante

$$\Delta = U_{rr} \cdot U_{r\phi} - U_{r\phi}^2 = -mg\rho r \cos \Phi - m^2 g^2 \sin^2 \Phi.$$

Wir erkennen drei Lösungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi = 0, & \quad r = R - \frac{mg}{\rho}, & \Delta_1 = -mg\rho \left(R - \frac{mg}{\rho} \right) \geq 0. \\ \text{b) } \Phi = \pi, & \quad r = R + \frac{mg}{\rho}, & \Delta_2 = mg\rho \left(R + \frac{mg}{\rho} \right) > 0. \\ \text{c) } \Phi = \arccos \frac{\rho R}{mg}, & \quad r = 0, & \Delta_3 = \rho^2 R^2 - m^2 g^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Falls ein Extremum vorliegt, so ist dieses wegen $U_{rr} > 0$ sicher ein Minimum. Im Fall a kann für hinreichend kleines ρ (wenig Ähnlichkeit mit einem starren Körper) die Lage $\Phi = 0$ ein Minimum der potentiellen Energie zur Folge haben, also stabil sein. Im Fall b liegt immer ein Minimum vor, die untere (natürliche) Lage ist auch bei Berücksichtigung der Elastizität stabil. Der Fall c, das Analogon zur Erdélyischen Lage, ergibt hingegen für hinreichend großes ρ ein Minimum (Ausartungsfall).

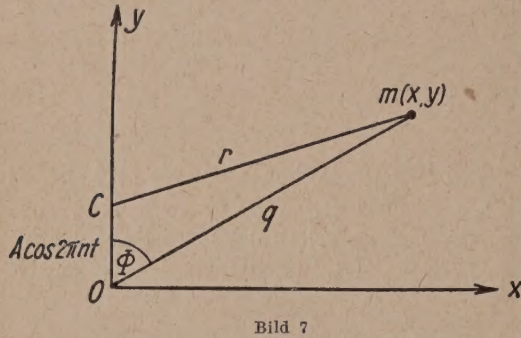


Bild 7

Nach dieser Einführung soll das erschütterte Pendel betrachtet werden. Während sich beim starren Pendel die Bewegungsgleichungen auf ein bewegtes Koordinatensystem mit seinem Ursprung in dem erschütterten Aufhängepunkt bezogen, wollen wir der Untersuchung beim

elastischen mathematischen Pendel ein mit der Erde starr verbundenes Ruhesystem (zunächst kartesische Koordinaten x, y) zugrunde legen (Bild 7). Das bewegliche Attraktionszentrum sei $C(0, A \cos 2\pi n t)$. Dann ist die potentielle Energie von m

$$U = \frac{\rho}{2} [x^2 + (y - A \cos 2\pi n t)^2 - 2R\sqrt{x^2 + (y - A \cos 2\pi n t)^2}] + mgy + \text{const.}$$

Zunächst soll gezeigt werden, daß wir einen kleinen Fehler begehen, wenn wir von U nur den zeitlichen Mittelwert betrachten. Dazu entwickeln wir U in eine Fourierreihe

$$U = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cos 2\pi n \nu t,$$

in der die a_{ν} Funktionen des Ortes sind. Wir wollen zeigen, daß die Lösung bis auf $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ nur von $\frac{a_0}{2}$, dem Mittelwert von U abhängt. Dabei soll die Masse m kleine Bewegungen in der x, y -Ebene um ein eigentliches Minimum (x_0, y_0) durchführen. Dann ist $\frac{\partial a_0}{\partial x} = \frac{\partial a_0}{\partial y} = 0$. Wir führen für $x = x_0$ und $y = y_0$ folgende Abkürzungen ein:

$$b_{11} = \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 a_0}{\partial x^2}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 a_0}{\partial x \partial y}, \quad b_{22} = \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 a_0}{\partial y^2}, \quad c_{1\nu} = \frac{1}{m} \frac{\partial a_{\nu}}{\partial x} \quad \text{und} \quad c_{2\nu} = \frac{1}{m} \frac{\partial a_{\nu}}{\partial y}$$

bei $\nu > 0$. Dann gilt: $b_{11} b_{22} - b_{12}^2 > 0$, $b_{11} > 0$ und $b_{22} > 0$. Wegen der kleinen Schwingungen können wir $|x - x_0|$ und $|y - y_0|$ als hinreichend klein annehmen, so daß bei Vernachlässigung höherer Glieder die Bewegungsgleichungen für m folgende Form haben:

$$\ddot{x} + b_{11}(x - x_0) + b_{12}(y - y_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{1\nu} \cos 2\pi n \nu t = 0,$$

$$\ddot{y} + b_{21}(x - x_0) + b_{22}(y - y_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} \cos 2\pi n \nu t = 0.$$

Zur weiteren Behandlung dieses Systems von Differentialgleichungen setzen wir zur Abkürzung:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda^2 & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} - \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^4 - (b_{11} + b_{22})\lambda^2 + (b_{11} b_{22} - b_{12}^2),$$

und hiermit ist

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta(2\pi n \nu)} [b_{12} c_{2\nu} - (b_{22} - 4\pi^2 n^2 \nu^2) c_{1\nu}] \cos 2\pi n \nu t, \\ y &= y_0 + \eta + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta(2\pi n \nu)} [b_{21} c_{1\nu} - (b_{11} - 4\pi^2 n^2 \nu^2) c_{2\nu}] \cos 2\pi n \nu t. \end{aligned}$$

ξ, η sei die Lösung der homogenen Gleichungen. Hierin sind die Reihen gleich $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, können also für hinreichend großes n vernachlässigt werden. Für ξ und η ergibt sich dann einfach:

$$\ddot{\xi} + b_{11}\xi + b_{12}\eta = 0, \quad \ddot{\eta} + b_{21}\xi + b_{22}\eta = 0,$$

ein Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, dessen charakteristische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ lautet. Die Lösung hängt also tatsächlich nur von a_0 ab. $\Delta(\lambda) = 0$ hat nur reelle Wurzeln. Daher ergibt sich für m bis auf $O(1/n^2)$ eine quasielastische schwingende Bewegung um den Punkt x_0, y_0 , die, da die Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ im allgemeinen inkommensurabel sind, fastperiodischen Charakter hat. Übrigens wird durch die Tatsache, daß die in x und y auftretenden zusätzlichen Fourierreihen ihrer Kleinheit wegen vernachlässigt werden können, nachträglich gerechtfertigt, daß in der Entwicklung nach $(x - x_0)$ und $(y - y_0)$ diese in a_0 bis zu den Gliedern zweiter Ordnung, in den a_v ($v \geq 1$) aber nur bis zu den Gliedern erster Ordnung vorgetrieben wurde. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, daß wir den Fehler $O(1/n^2)$ begehen, wenn wir von U nur den zeitlichen Mittelwert $a_0/2$ betrachten.

Zur rechnerischen Durchführung wollen wir Polarkoordinaten verwenden und erhalten nach Bild 7

$$U = \frac{\varrho}{2} (r - R)^2 + mgq \cos \Phi;$$

Φ wird dabei „raumfest“ gemessen, nicht aber r . Daher ist in U im raumfesten Φ, q -System $r^2 = A^2 \cos^2 2\pi n t + q^2 - 2Aq \cos 2\pi n t \cos \Phi$ zu setzen. Führen wir jetzt die zeitliche Mittelung durch, so erhalten wir

$$U = \frac{\varrho}{2} R^2 + mgq \cos \Phi + \frac{\varrho}{2} q^2 + \frac{\varrho}{4} A^2 - \frac{\varrho R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{q^2 + A^2 \cos^2 \tau - 2Aq \cos \Phi \cos \tau} d\tau$$

$$= \frac{\varrho}{2} (R - q)^2 + mgq \cos \Phi + \frac{\varrho}{4} A^2 \left(1 - \frac{R}{q} \sin^2 \Phi\right) + O\left(\frac{A^4}{q^2}\right).$$

Für $A = 0$ ergibt sich der oben betrachtete Fall. Es ist

$$U_\Phi = -\sin \Phi \left(mgq + \frac{A^2 \varrho R}{2q} \cos \Phi \right) = 0,$$

$$U_q = mg \cos \Phi + \varrho (q - R) + \frac{A^2}{4q^2} \varrho R \sin^2 \Phi = 0, \quad U_{qq} = \varrho - \frac{A^2}{2q^3} \varrho R \sin^2 \Phi,$$

$$\Delta = -mgq \cos \Phi - m^2 q^2 \sin^2 \Phi - \frac{A^2 \varrho^2 R}{2q} \cos 2\Phi + \frac{3A^2 mg \varrho R}{2q^2} \sin^2 \Phi \cos \Phi$$

$$- \frac{A^4 \varrho^2 R^2}{4q^4} \sin^4 \Phi.$$

Die drei möglichen Fälle sind jetzt folgende:

$$a) \quad \Phi = 0, \quad q = R - \frac{mg}{\varrho}, \quad \Delta_1 = m^2 q^2 - mgR\varrho - \frac{A^2 R \varrho^3}{2(R\varrho - mg)}.$$

$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \Delta_1 = -1$. Für hinreichend große ϱ („fast starrer Körper“) liegt ein Sattelpunkt vor. Die obere Lage ist also im Sinne unserer Definition instabil.

$$b) \quad \Phi = \pi, \quad q = R + \frac{mg}{\varrho}, \quad \Delta_2 = m^2 q^2 + mgR\varrho - \frac{A^2 R \varrho^3}{2(R\varrho + mg)}.$$

Auch hier liegt für hinreichend große ϱ ein Sattelpunkt vor, doch bleibt das Minimum länger erhalten als im ersten Fall.

$$c) \quad \Phi = \arccos \left(-\frac{2mgq^2}{A^2 \varrho R} \right).$$

Wir sehen, daß mit wachsendem ϱ Φ gegen $\pi/2$ strebt. (Hier also nicht mit wachsendem n)! Aus $U_q = 0$ folgt:

$$\varrho (q - R) - \frac{3m^2 q^2 \varrho^2}{A^2 \varrho R} + \frac{A^2 \varrho R}{4q^2} = 0.$$

Für sehr große ϱ gilt:

$$q^3 - Rq^2 + \frac{A^2 R}{4} = 0.$$

Wir setzen $q = R + \varepsilon$, dann gilt

$$\varepsilon^3 + 2R\varepsilon^2 + R^2\varepsilon + \frac{A^2}{4} R = 0$$

oder angenähert

$$\varepsilon^2 + \frac{R}{2}\varepsilon + \frac{A^2}{8} = 0, \quad \varepsilon = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 2A^2}}{4} \approx -\frac{A^2}{4R}, \quad q = \frac{3R + \sqrt{R^2 - 2A^2}}{4} \approx R - \frac{A^2}{4R}.$$

$$A_3 = \frac{A^2 \varrho^2 R}{2q} \left(1 - \frac{A^2 R}{2q^3}\right) - 2m^2 g^2 \left(1 + \frac{q^3}{RA^2}\right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{12m^4 g^4 q^4}{A^4 R^2}.$$

Wegen $q \approx R$ und $A \ll q$ ist für hinreichend große ϱ sicher $\text{sign } A_3 = +1$. Weiter ist

$$U_{qq} = \varrho \left\{ 1 - \frac{A^2}{2R^2} - \frac{3A^4}{8R^4} + 0 \left(\frac{A^6}{R^6} \right) \right\} + 0 \left(\frac{1}{\varrho} \right).$$

Diese „schräge“ Lage ist also stabil im Sinne unserer Definition⁵⁾.

Wir erkennen aus dieser Betrachtung, daß die elastischen Eigenschaften des Körpers Anlaß sind, daß das Pendel eine andere als die Klottersche Lage einnimmt⁶⁾.

7. Zusammenfassung

Die verschiedenen Untersuchungen über die Stabilisierung eines physikalischen Pendels mit periodisch vertikal erschüttertem Aufhängepunkt konnten bisher noch nicht in Einklang miteinander gebracht werden. Die hier im wesentlichen benutzte Methode wurde zuerst von Klotter [4] angewandt, doch nur bei der speziellen Fragestellung, wann das Pendel für $\alpha=0$ stabilisiert wird.

Durch die Berücksichtigung der verschiedenen Einflüsse konnten die unterschiedlichen bisher beobachteten Erscheinungen erklärt werden. Durch verschiedenartige Versuchsbedingungen und besonders durch unterschiedliche Bauweise der Pendel wurde bisher sowohl die schräge als auch die vertikale Mittellage experimentell bestätigt. In einer kleinen Versuchsreihe beobachtete der Verfasser beide Lagen. Eine schräge Lage ergab sich, sobald sich kleine Biegeschwingungen des Pendelkörpers einstellten. Durch sorgfältig ausgewählte Anfangsbedingungen konnten diese Biegeschwingungen ausgeschaltet werden. Dann wurden die Aussagen der Klotterschen Theorie bestätigt. Dabei wurde die Lage der Erdélyischen Theorie in dem Sinne labil, daß von ihr aus das Pendel sowohl nach unten als auch nach oben „fallen“ konnte. Die technische Schwierigkeit dieser Experimente liegt darin, daß bei den notwendigen hohen Erschütterungsfrequenzen ein Spiel der Gelenke und elastische Schwingungen nur schwer ausgeschaltet werden können.

Die Lösung der Differentialgleichung (3) ergab sowohl für den oberen als auch für den unteren Quadranten bei hypothetischer Einführung der Mittellagen (2) indifferente Parameterbereiche für stabile Lösungen. Doch konnte mit Hilfe des Grenzwertes (2) gezeigt werden, daß nur die Lagen $\alpha=0$ und $\alpha=\pi$ in Frage kommen. Bei dieser Untersuchung, die durch Reibungseffekte im Prinzip nicht geändert wird, ist die linearisierte Differentialgleichung als Ausgangspunkt gewählt worden. Weiter ist hierbei die Elastizität des Körpers nicht berücksichtigt. Bei den Experimenten beobachtet man außerordentlich kleine Schwingungen um die jeweilige Mittellage, sog. Zitterschwingungen. Daher brauchen wir auf den Unterschied der Lösungen (1) und (3) nicht einzugehen.

Neu ist die Betrachtung des elastischen Einflusses. Dieser läßt gerade eine schräge Lage als ausgezeichnet erkennen. Je nach der Größe dieser elastischen Einflüsse wird die schräge oder die Klottersche vertikale Lage eingenommen werden.

Die Untersuchung dieser Arbeit beschränkt sich aber auf vertikale lineare Oszillation des Aufhängepunktes, während mehrere der Arbeiten [1] bis [9] allgemeinere ebene Oszillationen zulassen. Schon bei der Betrachtung einer linearen nicht vertikalen Oszillation ergibt sich die Erschwerung, daß sich φ_p nicht mehr auf eine Konstante reduzieren läßt. Doch mit Hilfe des Satzes, daß es bei nichtperiodischen Lösungen von (3)_h immer eine periodische Partikularlösung von (3) gibt, sind analoge Schlüsse auch im Abschnitt 5 durchführbar. Es ergeben sich aber im allgemeinen andere Gleichgewichtslagen. — Herrn Prof. Dr. Weyrich möchte ich für Anregungen und Gespräche danken, durch die er das Entstehen dieser Arbeit gefördert hat.

⁵⁾ Es muß aber darauf hingewiesen werden, daß bei dieser Theorie die Frequenzabhängigkeit nicht zum Ausdruck kommt. Daher kann aus dieser Betrachtung nicht geschlossen werden, daß sich das Pendel mit wachsender Erschütterungsfrequenz der horizontalen Lage nähert. Auch in den später zu besprechenden Experimenten konnte dies nicht beobachtet werden.

⁶⁾ Die Spezialisierung auf das mathematische Pendel ist schon deshalb eine Einschränkung, weil hier nur Längsschwingungen, aber keine Biegeschwingungen auftreten können. Die analoge Behandlung des physikalischen Pendels dürfte sehr schwierig sein, so daß wir uns auf diese Untersuchung beschränken wollen, die das Wesentliche klar erkennen läßt.

Literaturverzeichnis

- [1] Diesselhorst: Über zitternde Bewegungen. Ann. Physik (5). 32 (1938), S. 205—210.
- [2] Erdélyi: Über kleine Schwingungen eines Pendels mit oszillierenden Aufhängepunkt. I. Z. angew. Math. Mech. 14 (1934), S. 235—247. II. Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 171—182.
- [3] Hirsch: Das Pendel mit oszillierenden Aufhängepunkt. Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), S. 41—52.
- [4] Klotter: Stabilisierung und Labilisierung durch Schwingungen. Forschg. Ing.-Wes., 12 (1941), S. 209—225.
- [5] Klotter-Kotowski: Über die Stabilität der Bewegungen des Pendels mit oszillierenden Aufhängepunkt. Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), S. 289—296.
- [6] v. d. Pol: Stabiliseering door kleine trillingen. Physica 5 (1925), S. 157—162.
- [7] Stephenson: On a new type of dynamical stability. Mem. Proc. Manchester lit. philos. Soc. 52 (1907/08), VIII.
- [8] Stephenson: On induced stability. Philos. Mag. J. Sci. (6) 15 (1908), S. 233—236.
- [9] Strutt: Stabiliseering en labilisceering door trillingen. Physica 7 (1927), S. 265—271.
- [10] McLachlan: Theory and application of the Mathieu functions. Oxford at the Clarendon Press (1947), 394 S.
- [11] Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen. 4. Aufl. S. 281. Leipzig: Teubner 1948.
- [12] Ince: Researches into the characteristic numbers of the Mathieu equation. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 46 (1925), S. 20—29.

Eingegangen: 12. 6. 1950.

Graphische Integrationsverfahren für die Meißnerschen Linienbilder bei Differentialgleichungen 1. Ordnung

Von Rudolf Ludwig in Braunschweig

Während Meißner mit seinem Verfahren eine Differentialgleichung 1. Ordnung nicht direkt integrieren konnte, werden hier neue Methoden angegeben, mit denen dies möglich ist. Außerdem kann auf einfache Weise eine Fehlerabschätzung durchgeführt werden, die sonst bei graphischen Verfahren meist unterlassen wird.

While the method of Meissner is not applicable to differential equations of the first order, the author gives new methods that are filling this gap. Furthermore, the estimate of the error is easily accomplished that is generally omitted in the case of graphical methods.

La méthode de Meissner ne permettant pas l'intégration directe d'une équation différentielle du premier ordre l'auteur donne des procédés nouveaux pour résoudre ce problème. De plus une estimation d'erreur, d'ordinaire ommise dans le cas d'un procédé graphique, ici se fait simplement.

Так как метод мейснера неприменим для интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка, то автор предлагает новые методы, заполняющие этот пробел. Кроме того указывается простой способ оценки погрешности, что обычно при графическом интегрировании не делается.

Einleitung

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurden für bestimmte Integrale Methoden angegeben, um mit den Meißnerschen Linienbildern graphisch gute Näherungswerte zu bestimmen. Bei den Meißnerschen Verfahren ist die Integration von DGLn.²⁾ zweiter und höherer Ordnung durchführbar, eine DGL. 1. Ordnung konnte nicht direkt behandelt werden. Nachdem Doetsch [1a] und Schulz [1b] für DGLn. 1. Ordnung ganz andere Wege gegangen waren, sind hier — aufbauend auf den Methoden für bestimmte Integrale — Konstruktionen mit einem rasch konvergierenden Iterationsverfahren entwickelt worden. Eine Fehlerabschätzung geht von einer von Tollmien [2a], [2b] stammenden Methode aus, die in eine für verschiedene Anwendungen besonders einfache Form gebracht wurde. In einer späteren Arbeit sollen die hier dargelegten Verfahren auf DGLn. beliebiger Ordnung ausgedehnt werden.

1. Allgemeines zur näherungsweisen Integration und Restabschätzung von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Es soll die explizite DGL. 1. Ordnung

$$y' = f(x, y) \quad \dots \dots \dots (1)$$

behandelt werden. Gesucht wird die Lösung, die der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0 \quad \dots \dots \dots (1^*)$$

¹⁾ „Analytische Untersuchungen und konstruktive Erweiterungen zu den graphischen Integrationsverfahren von Meißner und Grammel.“ Z. angew. Math. Mech. 31 (1951) 120—130, Hinweise auf das Schrifttum und die Formeln dieser Arbeit werden durch eine vorgesetzte „I“ gekennzeichnet.

²⁾ DGL(n) = Differentialgleichung(en), Gl(n) = Gleichung(en).

genügt. Von der Funktion $f(x, y)$ werde vorausgesetzt, daß sie 1. beschränkt sei:

$$|f(x, y)| \leq K \quad \dots \dots \dots (2)$$

in einem Gebiet \mathcal{G} : $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ und 2. der folgenden Lipschitz-Bedingung genüge:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2| \quad \dots \dots \dots (3).$$

Diese Bedingung ist sicher dann erfüllt, wenn man die weitere Voraussetzung macht, daß die partielle Ableitung der Funktion f nach y existiert und daß diese beschränkt sei

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M \quad \dots \dots \dots (3^*).$$

Die formale Lösung von (1) lautet:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad \dots \dots \dots (4).$$

Praktisch kann man die Gl. (4) durch ein Iterationsverfahren lösen. Bezeichnet man die Anzahl der Iterationsschritte durch oberen Index, so ergibt sich

$$y^{(v+1)} = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y^{(v)}(x)) dx \quad \dots \dots \dots (5).$$

Dieses Picardsche Iterationsverfahren konvergiert, wenn (2) und (3) erfüllt sind.

Zunächst werde an eine Abschätzungsformel erinnert (s. z. B. [3]), mit deren Hilfe man den Unterschied zwischen Näherungslösung und exakter Lösung erfassen kann. Ersetzt man in (1) die Funktion $f(x, y)$ durch eine Näherungsfunktion $\bar{f}(x, y)$, so entsteht eine neue DGl., die der Anfangsbedingung

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 = y_0 + \delta$$

genügen soll. Sie habe die Lösung $\bar{y}(x)$, also ist

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}(x)) = f(x, \bar{y}(x)) + \vartheta(x, \bar{y}(x)) \quad \dots \dots \dots (6).$$

Diese Lösung $\bar{y}(x)$ soll zur Ausgangsfunktion einer Iterationsfolge der gegebenen DGl. (1) genommen werden. Es stehen sich also die beiden Gln. gegenüber:

$$\bar{y}(x) - \bar{y}_0 = \int_{x_0}^x \bar{f}(x, \bar{y}(x)) dx = \int_{x_0}^x f(x, \bar{y}(x)) dx + \int_{x_0}^x \vartheta(x, \bar{y}(x)) dx \quad \dots \dots (7),$$

$$y^{(1)}(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(x, \bar{y}(x)) dx \quad \dots \dots \dots (8).$$

Setzt man das Iterationsverfahren bei der letzten Gl. fort, so findet man

$$y^{(n)}(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(x, y^{(n-1)}(x)) dx \quad \dots \dots \dots (9).$$

Aus (7) und (8) folgt:

$$y^{(1)}(x) - \bar{y}(x) = -\delta - \int_{x_0}^x \vartheta(x, \bar{y}(x)) dx \quad \dots \dots \dots (10).$$

Die Iterationsfolge (9) konvergiert nach den Voraussetzungen (2) und (3) nach $y(x)$. Das Integral der Gl. (10) kann man abschätzen:

$$\left| \int_{x_0}^x \vartheta(x, \bar{y}(x)) dx \right| \leq \Theta |x - x_0| \quad \dots \dots \dots (11).$$

Also:

$$|y^{(1)}(x) - \bar{y}(x)| \leq |\delta| + \Theta |x - x_0| \quad \dots \dots \dots (10^*).$$

Aus der Differenz der beiden Gln., die aus (9) für n und $n-1$ entstehen, findet man die Abschätzung:

$$|y^{(n)}(x) - y^{(n-1)}(x)| \leq M \int_{x_0}^x |y^{(n-1)}(x) - y^{(n-2)}(x)| dx \quad \dots \dots \dots (12).$$

Durch rekursives Einsetzen ergibt sich die auch von Tollmien [2] angegebene Abschätzungsformel:

$$|y - \bar{y}| \leq |\delta| e^{M|x-x_0|} + \frac{\Theta}{M} (e^{M|x-x_0|} - 1) \quad (13).$$

Gilt für die Näherungsformel $\bar{y}(x)$ dieselbe Anfangsbedingung wie für die DGl. (1), ist also $\delta = 0$, $\bar{y}_0 = y_0$, so ist:

$$|y - \bar{y}| \leq \frac{\Theta}{M} (e^{M|x-x_0|} - 1) \quad (13*).$$

Für die weitere Fehlerabschätzung eines Näherungsverfahrens soll der Methode von Tollmien gefolgt werden, aber sie soll in eine etwas einfacher zu handhabende Form gebracht werden.

Die exakte Lösung (4) der DGl. wird durch eine Näherungslösung $\bar{y}(x)$ ersetzt, indem das auf der rechten Seite stehende Integral näherungsweise bestimmt wird. Man kann dazu solche Näherungsverfahren, wie sie in I entwickelt wurden, etwa in folgender Form angeben:

$$\bar{y}_{n+k} - \bar{y}_n = h \sum_{\lambda=0}^k \alpha_\lambda f(x_{n+\lambda}, \bar{y}_{n+\lambda}) \quad (14).$$

Eine solche Gl. läßt sich im allgemeinen durch ein numerisches oder graphisches Iterationsverfahren lösen. Ist jedoch $\alpha_k = 0$, so kann man die Gl. direkt zur Bestimmung von y_{n+k} aus den vorhandenen Werten benutzen. Die Lösung der Näherungs-DGl. (6) kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+k} - \bar{y}_n &= \int_{x_n}^{x_n+k h} f(x, \bar{y}(x)) dx = \int_{x_n}^{x_n+k h} f(x, \bar{y}(x)) dx + \int_{x_n}^{x_n+k h} \vartheta(x, \bar{y}(x)) dx \\ &= h \sum_{\lambda=0}^k \alpha_\lambda f(x_{n+\lambda}, \bar{y}_{n+\lambda}) \quad (15). \end{aligned}$$

Von der Näherungslösung $\bar{y}(x)$ sind die diskreten Werte y_ν für $x_\nu = x_0 + \nu h$ bekannt. Ebenso ist die Funktion

$$f(x_\nu, \bar{y}_\nu) = F(x_\nu)$$

nur an diesen Stellen bekannt. Aus obiger Gl. folgt:

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_n+k h} \vartheta(x, \bar{y}(x)) dx &= h \sum_{\lambda=0}^k \alpha_\lambda f(x_{n+\lambda}, \bar{y}_{n+\lambda}) - \int_{x_n}^{x_n+k h} f(x, \bar{y}(x)) dx \\ &= h \sum_{\lambda=0}^k \alpha_\lambda F(x_{n+\lambda}) - \int_{x_n}^{x_n+k h} F(x) dx. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist aber das Restglied der Integration, also der Integrationsfehler

$$\int_{x_n}^{x_n+k h} \vartheta(x, \bar{y}(x)) dx = R_n = k h \Theta_n \quad (16),$$

und daraus:

$$\Theta_n = \frac{1}{k h} R_n(x, \bar{y}(x)),$$

wobei das Restglied mit der gefundenen Näherungslösung $\bar{y}(x)$ zu bilden ist. Nach Gl. (11) gilt:

$$\left| \int_{x_0}^x \vartheta(x, \bar{y}(x)) dx \right| \leq |x - x_0| \Theta \leq |x - x_0| |\Theta_n|_{\max} = \frac{|x - x_0|}{k h} |R_n|_{\max},$$

oder

$$\Theta = \frac{1}{k h} |R_n|_{\max} \quad (17).$$

Für die DGl. 1. Ordnung gilt somit folgende Fehlerabschätzung einer Näherungslösung \bar{y} :

$$|y - \bar{y}| \leq \frac{|R_n|_{\max}}{k h M} (e^{M|x-x_0|} - 1) \quad (18).$$

Hieraus ist sofort zu ersehen, daß sich der Fehler aus zwei Faktoren zusammensetzt, nämlich dem Integrationsfehler [4] für einen Schritt und der Fehlerfortpflanzung durch den gesamten Integrationsbereich.

2. Das Tangentenverfahren ohne Iteration (Bild 1)

Um die DGl. (1) mit der Anfangsbedingung (1*) graphisch zu integrieren, sind also zunächst nur je ein Punkt der Polaren C und der ersten Polaren C_1 und damit auch nur ein Punkt des Linienbildes L bekannt. Wenn die Polare der ersten Ableitung bekannt wäre, brauchte man nur eins der Integrationsverfahren I (2,2 bis 2,4) anzuwenden. Nimmt man zunächst einmal an, es seien nach Festlegung der Schrittweite h die Punkte P_λ und P'_λ für $\lambda = 0, 1, \dots, k$ schon bekannt — die Konstruktion solcher Ausgangspunkte soll in Abschn. 5 besprochen werden —, so läßt sich sofort das Tangentenverfahren I (2,3) zur Integration über ein Intervall $2h$ anwenden. Nach Gl. I (4) ist folglich

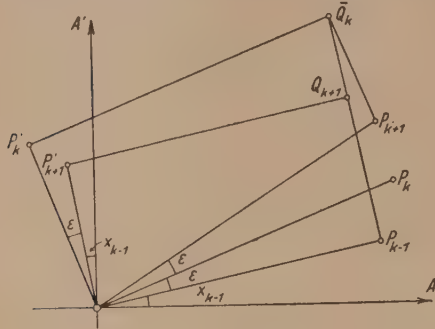


Bild 1. Tangentenverfahren für DGl. 1. Ordnung

$$\bar{y}_{k+1} = \bar{y}_{k-1} + 2f_k \sin \varepsilon$$

oder, wenn man die Schrittweite so wählt, daß $\varepsilon = \arcsin h$,

$$\bar{y}_{k+1} = \bar{y}_{k-1} + 2hf(x_k, \bar{y}_k).$$

Die Lösung erfolgt also in diesem Falle ohne Iteration. Mit dem soeben konstruierten Wert \bar{y}_{k+1} berechnet man

$$\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$$

und wiederholt die Konstruktion nun mit den Punkten P_k , P_{k+1} und P'_k und P'_{k+1} .

Zur Durchführung der Restabschätzung findet man mit der zweiten Gl. I (13) für das Intervall $2h$:

$$\Theta = \frac{1}{2h} |R_n^M| = \frac{h^2}{6} |f''(x, \bar{y})|_{\max} \dots \dots \dots (19).$$

und damit

$$|y - \bar{y}| \leq \frac{h^2}{6M} (e^{M|x-x_0|} - 1) |f''(x, \bar{y}(x))|_{\max} \dots \dots \dots (20).$$

Dabei ist der erforderliche Anfangswert y_1 als fehlerlos vorausgesetzt, ist dieser jedoch mit dem Fehler δ behaftet, so gilt:

$$|y - \bar{y}| \leq \delta e^{M|x-x_0|} + \frac{\Theta}{M} (e^{M|x-x_0|} - 1) \dots \dots \dots (20*).$$

3. Das Sehnungsverfahren mit Iteration

Für das Sehnungsverfahren angewandt auf die DGl. (1) ergibt sich nach Gl. I (7) aus Abschn. I (2,2):

$$\bar{y}_{k+1} = \bar{y}_k + [f(x_k, \bar{y}_k) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})] \frac{h}{2},$$

wobei $\frac{\varepsilon}{2} = \arctg \frac{h}{2}$ gesetzt wurde. Hat man außer den Punkten P_k und P'_k noch einen ersten Näherungswert von $P_{k+1}^{(1)}$, so kann man daraus

$$\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1}^{(1)})$$

berechnen und damit auch $P_{k+1}^{(1)}$ zeichnen. Dies bedeutet, daß man obige Gl. durch Iteration lösen kann, indem man stets die Sehnungen im Linienbild zieht. Die Bedingung dafür, daß das Verfahren konvergiert, ist bekanntlich, wenn die zu lösende Gl. die Form $y = \varphi(y)$ hat:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| < 1.$$

Die Konvergenzbedingung für obiges Iterationsverfahren lautet also:

$$\frac{h}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < 1,$$

oder nach Gl. (3*)

$$hM < 2 \dots \dots \dots (21).$$

Dadurch ist also eine Bedingung für die Schrittweite festgesetzt. Um im ganzen Integrationsbereich gleichgünstige Verhältnisse der Konvergenz zu haben, muß man beachten, daß das Produkt hM bei stark veränderlichem M ungefähr konstant gehalten wird. Hierdurch wird nach Collatz eine „natürliche Schrittweite“ [5] festgelegt. Bei einer „Schrittkennzahl“ Mh in der Größenordnung von etwa 0,2 wird man erfahrungsgemäß meist eine so günstige Iterationsfolge bekommen, daß schon der zweite Schritt graphisch kaum in Erscheinung tritt. Um einen ersten Näherungswert zu erhalten, verwendet man das im letzten Abschnitt angegebene Tangentenverfahren.

Für die Restabschätzung ergibt sich aus der ersten Gl. I (13) der Integrationsfehler:

$$\Theta = \frac{1}{h} |R_n^{(T)}| = \frac{h^2}{12} |f''(x, \bar{y}(x))|_{\max} \dots \dots \dots (22),$$

und daraus die Abschätzungsformel:

$$|y - \bar{y}| \leq \frac{h^2}{12 M} (e^{M|x-x_0|} - 1) |f''(x, \bar{y}(x))|_{\max} \dots \dots \dots (23).$$

Der Fehler kann also gegenüber dem Tangentenverfahren durch Anwendung des Sehnenvorgahrens mit Iteration nur auf die Hälfte vermindert werden.

4. Das kombinierte Sehnen-Tangenten-Verfahren mit Iteration (Bild 2)

Wie in den vorhergehenden zwei Abschnitten seien wieder die drei Punkte P_λ , P'_λ und Q_λ für $\lambda = 0, 1, \dots, k$ bereits bekannt, wobei die Schrittweite h festgelegt worden sei. Nach dem Tangentenverfahren (Abschn. 2) bestimmt man einen nullten Näherungswert $P_{k+1}^{(0)}$ und berechnet mit der DGl. (1) einen Näherungswert von $P_{k+1}^{(0)}$. Die drei Punkte P'_{k-1} , P'_k , $P_{k+1}^{(0)}$ sind Punkte der ersten Polaren der gesuchten Integralkurve. Integriert man diese erste Polare mit P'_{k-1} als Anfangspunkt über das Intervall $2h$ nach dem Sehnen-Tangenten-Verfahren I (2,4), so erhält man einen ersten verbesserten Wert $P_{k+1}^{(1)}$. Wieder berechnet man mit der DGl. (1) den verbesserten Wert $P_{k+1}^{(1)}$ und wiederholt das Verfahren solange, bis innerhalb der Zeichengenauigkeit der Punkt $P_{k+1}^{(v)}$ sich nicht mehr ändert. In Bild 2 ist bereits $P_{k+1}^{(2)} = P_{k+1}^{(1)}$. Nach I (2,4) gilt für das Iterationsverfahren Gl. I (14)

$$\bar{y}_{k+1} = \bar{y}_{k-1} + \frac{1}{3} [(f(x_{k-1}, \bar{y}_{k-1}) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})) \operatorname{tg} h + 4f(x_k, \bar{y}_k) \sin h].$$

Aus dieser Gl. folgt als Bedingung für die Konvergenz

$$\frac{1}{3} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \operatorname{tg} h < 1,$$

oder

$$M \operatorname{tg} h < 3.$$

Da h genügend klein ist, kann man auch einfacher dafür schreiben:

$$Mh < 3 \dots \dots \dots (24).$$

Aus der Gl. I (15) für den Integrationsfehler folgt sofort:

$$\Theta = \frac{R}{2h} = \frac{h^4}{180} |f^{IV}(x, \bar{y}) + 10f''(x, \bar{y}) + 9f(x, \bar{y})|_{\max} \dots \dots \dots (25).$$

Die Fehlerabschätzung für das Sehnen-Tangenten-Verfahren lautet also

$$|y - \bar{y}| \leq \frac{h^4}{180 M} (e^{M|x-x_0|} - 1) |f^{IV}(x, \bar{y}) + 10f''(x, \bar{y}) + 9f(x, \bar{y})|_{\max} \dots \dots (26).$$

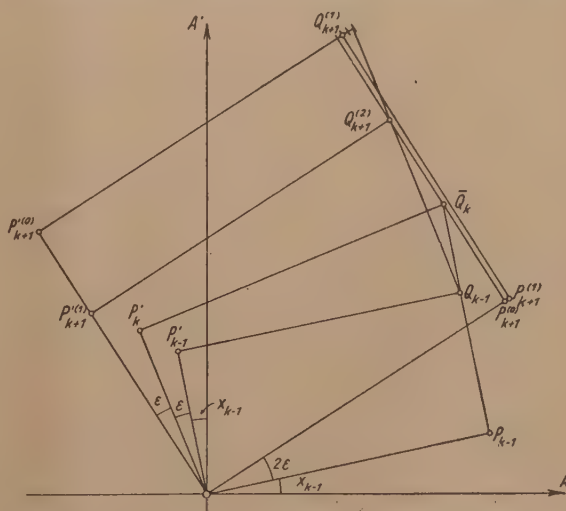


Bild 2. Sehnen-Tangenten-Verfahren für DGl. 1. Ordnung

Dieser Fehler ist im Vergleich zu dem des Sehnenvfahrens (23) größenordnungsmäßig um den Faktor h^2 kleiner, außerdem besagt die Konvergenzbedingung, daß eine größere Schrittweite zulässig ist. Bei vorgegebener Fehlerschranke muß man also bei dem Sehnenvfahren das Intervall in eine größere Anzahl Schritte unterteilen als bei dem nur wenig mehr Zeichenarbeit erfordernden Sehnen-Tangenten-Verfahren.

Bei der Anwendung des allgemeinen Sehnen-Tangenten-Verfahrens über ein k -fach unterteiltes Intervall kh nach I (2,5) müssen also k Punktepaare P_n, \dots, P_{n+k-1} und P'_n, \dots, P'_{n+k-1} bekannt sein. Nach der Tangentenkonstruktion Gl. I (17) gewinnt man wie vorher einen nullten Näherungswert $P_{n+k}^{(0)}$ und berechnet mit der DGl. (1) $\bar{y}_{n+k}^{(0)}$, um den Punkt $P_{n+k}^{(0)}$ zeichnen zu können. Nun läßt sich auch der Sehnenzug nach Gl. I (16) konstruieren und durch Bildung des Mittelwertes gemäß Gl. I (18) erhält man den verbesserten Wert $P_{n+k}^{(1)}$ und wiederholt nun die Konstruktion solange, bis sich der Wert von \bar{y}_{n+k} innerhalb der Zeichengenauigkeit nicht mehr ändert. Aus den Gln. I (16), (17) und (18) folgt als Konvergenzbedingung für das Iterationsverfahren:

$$\frac{5k-6}{6(k-1)} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \operatorname{tg} \frac{h}{2} < 1,$$

oder

$$M \operatorname{tg} \frac{h}{2} < \frac{6(k-1)}{5k-6} \dots \dots \dots (27),$$

wofür man bei kleinem h auch schreiben kann:

$$Mh < \frac{12(k-1)}{5k-6} \dots \dots \dots (27*).$$

Man erhält für $k=2$ wie in Gl. (24) $Mh < 3$ und im Grenzfall für $k \rightarrow \infty$

$$Mh < 2,4 \dots \dots \dots (28).$$

Diese letzte Bedingung kann man, da die rechte Seite am kleinsten ist, auch unabhängig von k stets zur Festsetzung der Schrittweite fordern.

5. Die Bestimmung von Ausgangswerten (Bild 3)

Durch das Anfangswertproblem der DGl. (1) und (1*) sind von den Polaren C und C_1 und dem Linienbild L der gesuchten Lösung nur je ein Punkt bekannt. Zur Durchführung der in den vorhergehenden Abschnitten dargelegten Verfahren benötigt man aber wenigstens je zwei Punkte. Der Satz 2 aus I (2,1) legt die Tangentenrichtung der Polaren in sehr einfacher Weise fest. Für

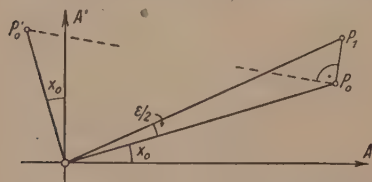


Bild 3. Bestimmung von Ausgangswerten

benachbarte Punkte kann man also einen Näherungswert auf der Tangente annehmen. Dadurch ist also auch ein Näherungswert von y' berechenbar. Mit diesen zwei Punkten läßt sich das Sehnenvfahren mit Iteration anwenden. Man muß nun zwei Fälle unterscheiden:

a) Will man die Lösung ausschließlich mit dem Sehnenvfahren durchführen, so genügt also die Festlegung des Ausgangspunktes P_1 auf der Tangente der Polaren.

Nur, wenn für diesen Punkt bei der gewählten Schrittweite die Konvergenz der Iteration zu schlecht wird, muß man zur Unterteilung (besonders Halbierung) der Schrittweite übergehen.

b) Will man das Sehnen-Tangenten-Verfahren anwenden, so muß man beachten, daß die Genauigkeit dieses Verfahrens größer ist als die des Sehnenvfahrens. Daher muß man durch Halbierung oder evtl. noch weitere Unterteilung den Fehler des nach der Sehniteration wie unter a) bestimmten Punktes möglichst herabdrücken, denn der Fehler des ungenauen Anfangspunktes pflanzt sich durch das ganze Verfahren fort, wie der erste Summand der Gl. (13) zeigt.

Der Konstruktion der Ausgangswerte muß man die erforderliche Sorgfalt angedeihen lassen, da durch die Fehlerfortpflanzung der Fehleranteil $\delta e^M |x-x_1|$ leicht den eigentlichen Verfahrensfehler übertreffen kann.

Außer der hier dargelegten Methode, einen ersten Näherungswert auf der Tangente der Polaren festzulegen, kann man bei dem Iterationsverfahren auch von einem geschätzten Werte ausgehen. Dies ist gerade am Anfang allerdings etwas unsicher; leichter ist dieses Schätzen, wenn man schon ein Stück der Kurve kennt, also nur eine Schrittweite extrapoliert.

6. Zusammenfassung für das Sehn-Tangenten-Verfahren

DGl.:	$y' = f(x, y)$
Anfangswerte:	$y_0 = y(x_0), \quad y'_0 = f(x_0, y_0)$
Integrationsbereich:	$x_0 \leq x \leq x_n$
Festlegung der Schrittweite h , unter Beachtung der Konvergenzbedingung:	$Mh < 3.$

1. Schritt: Bei halber Schrittweite: $P_{1/2}^{(0)}$ auf der Tangente der Polaren in P_0 konstruiert.
Berechnet: $\bar{y}_{1/2}^{(0)}$ aus der DGl.
2. Schritt: $P_0 P_{1/2}^{(0)}$ nach dem Sehnverfahren integriert: $P_{1/2}^{(1)}$.
Berechnet: $\bar{y}_{1/2}^{(1)}$ aus der DGl.
Wiederholung des 2. Schrittes bis das Iterationsverfahren innerhalb der Zeichengenauigkeit konvergiert.
3. Schritt: Bei ganzer Schrittweite: nach dem Tangentenverfahren $P_1^{(0)}$ konstruiert.
Berechnet: $\bar{y}_1^{(0)}$ aus der DGl.
4. Schritt: Nach dem Sehnverfahren $P_0 P_{1/2}^{(1)} P_1^{(0)}$ integriert.
Durch den Mittelwert $P_1^{(1)}$ bestimmt.
Berechnet: $\bar{y}_1^{(1)}$ aus der DGl.
Wiederholung des 4. Schrittes (Iterationsverfahren).
5. Schritt: Wie 3. Schritt für das folgende Intervall x_1 bis x_3 : ergibt $P_2^{(0)}$.
6. Schritt: Wie 4. Schritt: $P_2^{(1)}, P_2^{(2)}, \dots, P_2$.
— usw. —

7. Beispiele

7.1. Allgemeines

Für eine vorgelegte DGl. (1) mit den Anfangswerten (1*) und dem geforderten Integrationsbereich $a \leq x \leq b$ muß man sich unter Beachtung der Konvergenzbedingung für das Iterationsverfahren für eine Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ entscheiden, wobei n die Anzahl der Schritte ist.

Nach der Größe der Zeichnung muß man dann noch den Maßstab wählen, in dem y und y' aufgetragen wird. Da man x als Winkel im Bogenmaß aufzutragen hat, empfiehlt es sich, wenn man mehrere solche Zeichnungen anzufertigen hat, auf Transparentpapier ein Strahlenbüschel mit einem Winkel zwischen den Strahlen von 0,05 im Bogenmaß aufzuzeichnen. Zu große oder zu kleine Winkel kann man durch affine Transformation der Variablen x der DGl. vermeiden, also z. B. $\xi = cx$ (s. Beispiele).

Eine prinzipielle Schwierigkeit bei der Fehlerabschätzung besteht darin, daß man höhere Ableitungen z. B. $f^{IV}(x, y)$ der gegebenen Funktion $f(x, y)$ braucht. Obwohl das Differenzieren an und für sich keine Schwierigkeiten macht, ist doch der Rechenaufwand groß und die Formeln werden umständlich. Ein anderer gangbarer Weg ist der, daß man die Differenzenquotienten als Näherungswerte benützt, dabei muß man allerdings in Kauf nehmen, daß die höheren Differenzen stark streuen. Meist wird man allerdings graphisch den Verlauf der Differenzen glätten können (evtl. Wiederholung des Verfahrens bei der nächsten Differenz).

7.2. Beispiel für das Tangentenverfahren ohne Iteration

Es soll die DGl. $y' = x^2 + y^2$
mit der Anfangsbedingung: $y(0) = 1$
für den Bereich $0 \leq x \leq 0,25$
integriert werden. Vorteilhaft ist es, die Variable x affin zu transformieren (Vergrößerung des Winkelbereiches):

Durch $\xi = \pi x$ erhält man

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\xi^2}{\pi^2} + y^2 \right), \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{4}.$$

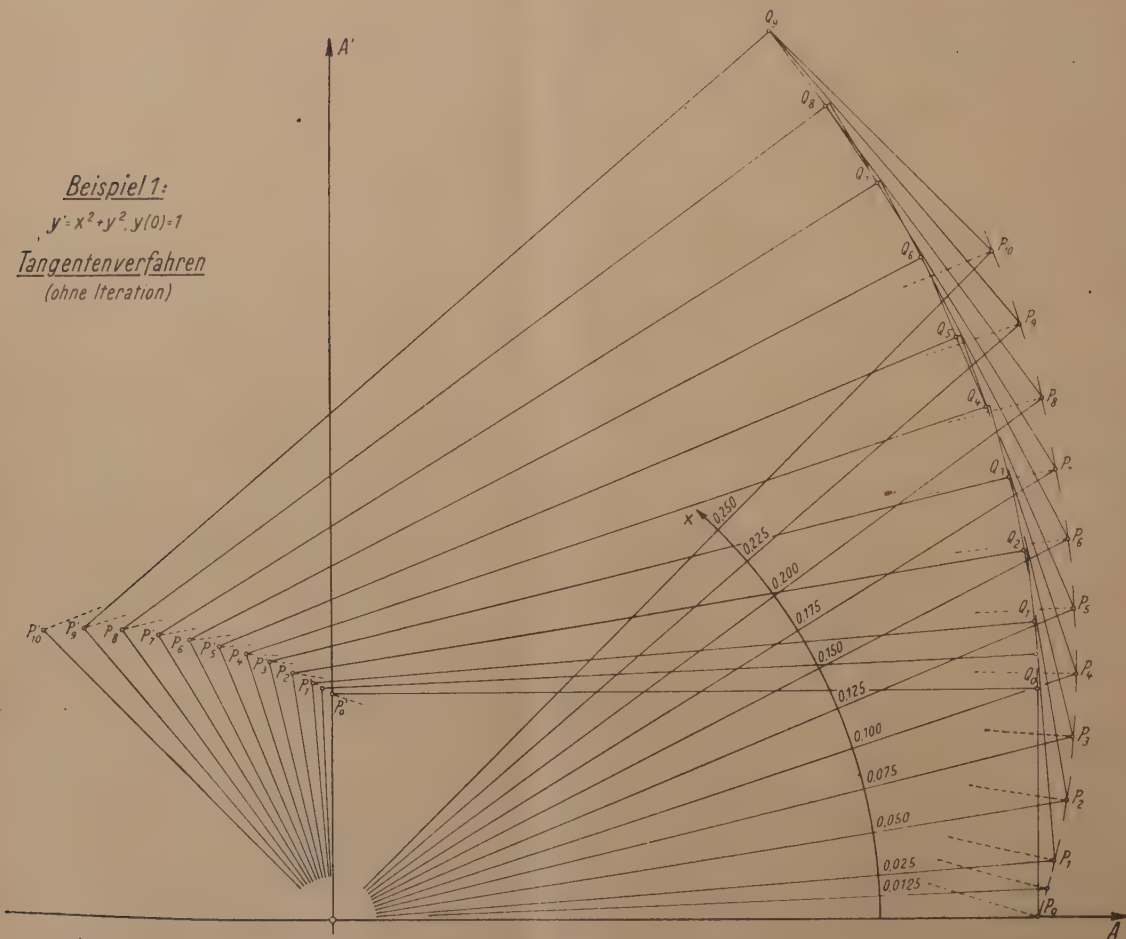
Es wurde bei der Originalzeichnung gewählt (Verkleinerung auf etwa $\frac{1}{2}$):

1. die Schrittweite $h = \frac{\pi}{40}$, d. h. $\Delta x = 0,0125$;
2. die Zeicheneinheit $e = 200$ mm.

Die Konstruktion lieferte folgende Werte, wobei die Berechnung der Funktionswerte mit einer Quadrattafel [6] und dem Rechenschieber durchgeführt wurde.

<i>n</i>	<i>x</i>	\bar{y}	<i>f</i> (<i>x</i> , \bar{y})	<i>n</i>	<i>x</i>	\bar{y}	<i>f</i> (<i>x</i> , \bar{y})
0	0	1	0,3183 *)	5	0,125	1,137	0,417
—	0,0125	1,013	0,3268	6	0,150	1,171	0,444
1	0,025	1,025	0,3350	7	0,175	1,203	0,471
2	0,050	1,053	0,3542	8	0,200	1,245	0,507
3	0,075	1,083	0,3746	9	0,225	1,283	0,540
4	0,100	1,108	0,3946	10	0,250	1,327	0,581

Der erste Wert (*) ist bei halber Schrittweite auf der Tangente der Polaren in P_0 konstruiert worden.



Die Fehlerabschätzung ergibt, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll,

$|y_{10} - \bar{y}_{10}| \leq 0,022.$

Einschließlich des Ablesefehlers kann also das Ergebnis in folgender Form angegeben werden:

$\bar{y}_{10} = 1,33 \pm 0,03.$

Der Verfahrensfehler ist also in diesem Falle größer als die durch die Ablesung erreichte Genauigkeit.

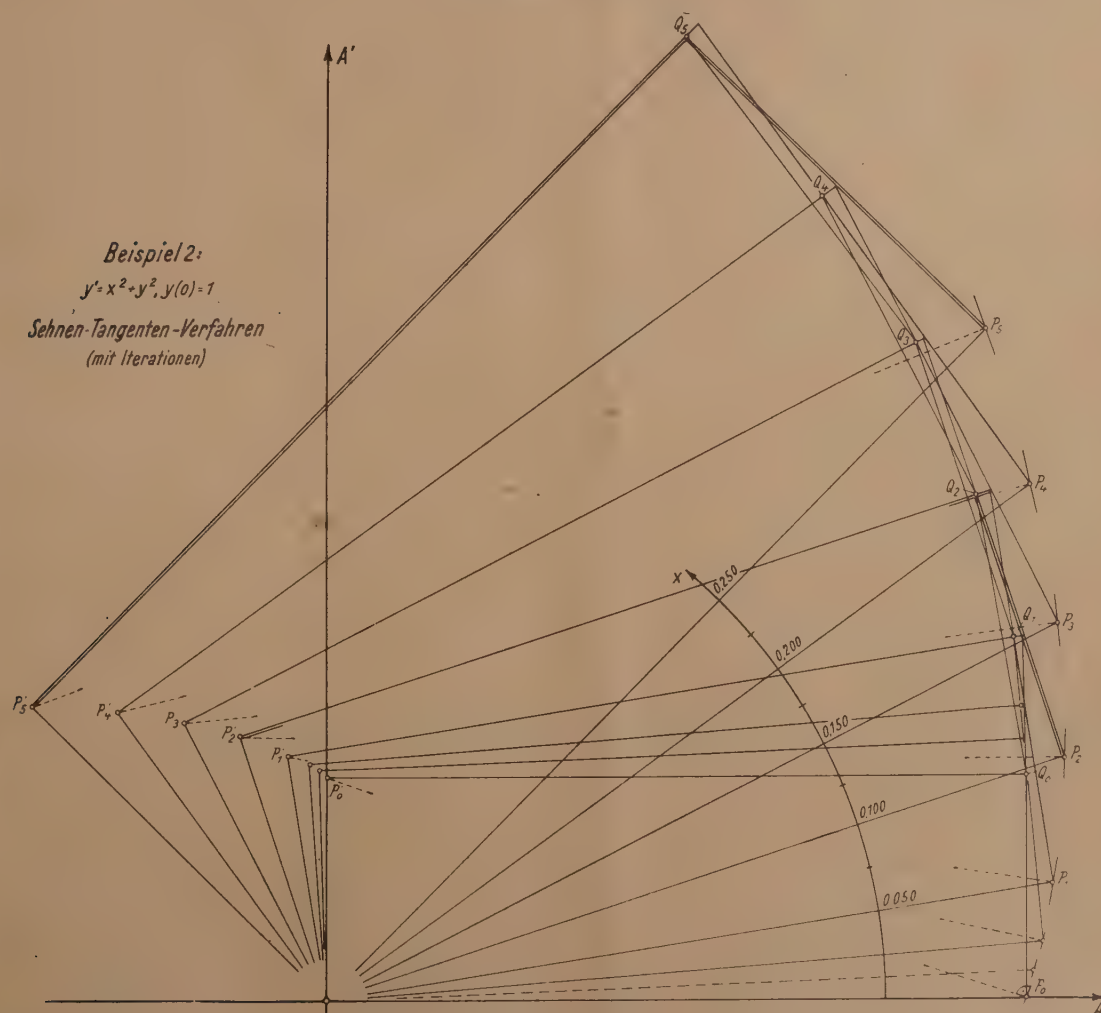
7.3. Beispiel für das Sehnen-Tangenten-Verfahren mit Iteration

Für das gleiche DGL-Problem wie im vorhergehenden Abschn. 7.2 soll das Sehnen-Tangenten-Verfahren mit Iteration in der Weise durchgeführt werden, daß die Schrittweite verdoppelt wird, also $h = \frac{\pi}{20}$. Man erhält folgende Wertetabelle:

n	x	\bar{y}	$f(x, \bar{y})$	n	x	\bar{y}	$f(x, \bar{y})$
0	0	1	0,3183	2	0,100	1,109	0,3948
—	0,0125	1,013	0,3268	3	0,150	1,174	0,447
—	0,025	1,026	0,3268	4	0,200	1,245	0,506
1	0,050	1,052	0,3358	5	0,250	1,341	0,593

Innerhalb der Zeichengenauigkeit genügt stets eine einmalige Iteration. Die Lipschitzkonstante lautet:

$$M = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\max} = \left| \frac{2y}{\pi} \right|_{\pi/4} < 1.$$



Mit diesem Wert ist also die Konvergenzbedingung

$$Mh = \frac{\pi}{20} < 3$$

sicher erfüllt.

Bei einer Ablesengenauigkeit von 0,1 mm sind also für den letzten gefundenen Wert \bar{y}_5 die Fehlerschranken: $\bar{y}_5 = 1,341 \pm 0,001$. Die Fehlerschranken darf man nicht zu eng wählen, da noch die kaum abschätzbaren Zeichengenauigkeiten hinzukommen, die sehr stark von der Sorgfalt und Übung des Zeichners abhängig sind.

Für die Fehlerabschätzung kann man einer Differenzentafel der \bar{y} folgende Maximalwerte entnehmen:

$$|\Delta^4 f|_{\max} = 0,025, \quad |\Delta^2 f|_{\max} = 0,028, \quad |f|_{\max} = 0,6.$$

Daraus folgt für die Differentialquotienten:

$$|f^{IV}|_{\max} \approx \frac{|\Delta^4 f|_{\max}}{h^4} = 40, \quad |f''|_{\max} \approx 12.$$

Die Formel für die Restabschätzung liefert folgende Schranken:

$$|y_5 - \bar{y}_5| \leq \frac{\pi^4}{20^4 \cdot 180 \cdot 1} [40 + 12 + 5,4] (e^{\pi/4} - 1) = 0,0003.$$

Der nichtberücksichtigte Fehler der Ausgangswerte spielt hier keine Rolle.

8. Über ein numerisches Verfahren

Die in I Abschn. 2,6 abgeleiteten Integrationsformeln (I, Tabelle 2) lassen sich auch sehr einfach zur numerischen Integration von DGLn. verwenden. Sind bereits die Werte \bar{y}_ν und \bar{y}'_ν für $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ bekannt, so findet man mit der betreffenden Formel für J_2^*

$$\bar{y}_n^{(0)} = \bar{y}_{n-k} + J_2^*.$$

Mit diesem Wert berechnet man nach (1) $\bar{y}'_n^{(0)}$. Jetzt kann man am einfachsten J_1^* berechnen und dann den gemittelten Wert \bar{J}^* benutzen:

$$\bar{y}_n^{(1)} = \bar{y}_{n-k} + \bar{J}^*$$

und dann mit diesem Wert weiter iterieren.

Ausgangswerte kann man in ähnlicher Weise wie bei den graphischen Verfahren aus der ersten Zeile der Tabelle I, 2 gewinnen, indem man mit J_2^* beginnend für das halbe Intervall einen Näherungswert bestimmt.

Die in diesen Formeln enthaltene Integration unter Benutzung der Simpsonschen Regel soll an einem von Willers [7] behandelten Beispiel gezeigt werden:

Für die DGL

$$y' = -\sqrt{xy - 1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(1) = 2$$

erhält man:

k	x	y ⁽⁰⁾	y ⁽¹⁾	y ⁽²⁾	k	x	y ⁽⁰⁾	y ⁽¹⁾	y ⁽²⁾
0	1	2	—	—	4	1,4	1,57381	1,57418	—
—	1,05	1,95	1,94942	—	5	1,5	1,46420	1,46454	—
1	1,1	1,89768	1,89774	—	usw.				
2	1,2	1,79143	1,79188	1,79187	17	2,7	0,44416	0,44425	0,44424
3	1,3	1,68324	1,68364	—	18	2,8	0,40381	0,40383	—

Striche in den Spalten 4 und 5 bedeuten, daß keine Änderungen gegen die vorhergehenden Spalten eintreten.

Die Werte sind die gleichen, wie sie von Willers angegeben wurden, aber es sind höchstens zwei Iterationen nötig. Die Fehlerabschätzung liefert:

$$|y_{18} - \bar{y}_{18}| < 1,10^{-3}.$$

Schrifttum

- [1a] G. Doetsch: Über die graphische Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung. Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 464—466.
- [1b] W. Schulz: Über das Meißnersche Integrationsverfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung. Dtsch. Math. 6 (1941), S. 271—276.
- [2a] W. Tollmien: Über die Fehlerabschätzung beim Adamschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), S. 83—90.
- [2b] A. Fricke: Über die Fehlerabschätzung des Adamschen Verfahrens zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung. Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 165—178.
- [3] R. Rothe: Höhere Mathematik. Teil III. 1. Auflage. § 83. S. 177. Leipzig 1935.
- J. Horn: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. Auflage. § 11. Gl. (11). Leipzig und Berlin 1937.
- [4] W. Tollmien: a. a. O. Die Gl. (13) ist auf S. 85 als Gl. (11) richtig angegeben, aber bei der Durchrechnung in § 5, S. 90 muß es in den Schlußformeln (56) und (56a) statt $\frac{\delta}{M} e^{M|x-x_2|}$ heißen $\delta e^{M|x-x_2|}$.
- [5] L. Collatz: Natürliche Schrittweite bei numerischer Integration von Differentialgleichungssystemen. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 216—225.
- [6] Z. B. in der bekannten Gaußschen 5stelligen Logarithmentafel.
- [7] Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis. § 33,2. S. 316. (Tabelle 2, S. 319.) Berlin u. Leipzig 1928.

Eingegangen: 19. 6. 1950.

KLEINE MITTEILUNGEN

Zum Gebrauch des harmonischen Analysators von Mader-Ott¹⁾.

Ich will hier zeigen, wie man

1. durch eine bequeme, weil kongruente Umzeichnung der mit der Periode $2l$ periodischen Kurve $y = f(x)$ den vom Fahrstift des Analysators zu beschreibenden Weg möglichst abkürzen, insbesondere das Zurückführen auf der x -Achse ersparen kann,

2. wie man damit die Anzahl der Umfahrungen und der zugehörigen Planimeterablesungen, die notwendig sind, um nach einem von E. Nyström²⁾ angegebenen Verfahren Fourierkoeffizienten zu bestimmen, für die keine Zahnräder vorhanden sind, und auf Periodenstrecken > 36 cm zu analysieren, auf die Hälfte herabdrücken kann,

3. wie man dabei mit zwei zusätzlichen Umfahrungen auch die dem Nyströmschen Verfahren bisher nicht zugänglichen Koeffizienten a_1 und b_1 in der Entwicklung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots$$

bekommen kann.

1. Abkürzung des Fahrstiftweges

Aus der Theorie des Mader-Ottschen Analysators³⁾ folgt unmittelbar: Sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei graphisch gegebene Funktionen mit der gemeinsamen Periode $2l$, dann erhält man mit dem Analysator die Fourierkoeffizienten von $f(x) - g(x)$ genau so wie die von $f(x)$, wenn man nur den Fahrstift statt auf der x -Achse auf der Kurve $y = g(x)$ zurückführt. Die so entstehende Umfahrung wollen wir die „Umfahrung $f(x) - g(x)$ auf der Strecke $(0, 2l)$ “ nennen. Als Anfangs- und Endpunkt nehmen wir in der Regel einen Punkt der Strecke vom Punkt $(0, g(0))$ zum Punkt $(0, f(0))$. Die genannte Theorie zeigt auch, daß der Analysator für je zwei Zahlen p, q , für die $0 \leq p \leq q \leq 2l$ gilt, bei der Umfahrung auf der Strecke (p, q) die Integrale

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{l} \int_p^q [f(x) - g(x)] \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ & \frac{1}{l} \int_p^q [f(x) - g(x)] \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

soweit die zugehörigen Zahnräder vorhanden sind.

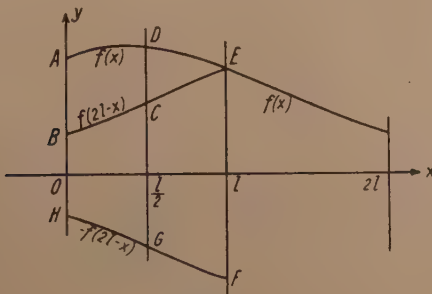


Bild 1

¹⁾ Ein Teil der folgenden Ausführungen ist sinngemäß auf andere Analysatoren übertragbar.

²⁾ E. Nyström, Über den Gebrauch des harmonischen Analysators Mader-Ott. Soc. Scient. Fenn. Phys. Math. IX, 14 (1937), referiert in den unter ³⁾ angeführten Werken.

³⁾ Vgl. etwa Meyer zur Capellen W., Mathematische Instrumente 1941, S. 216ff. und Willers Fr. A., Mathematische Instrumente 1943, S. 178ff.

Ist die Funktion $f(x)$ in der Periodenstrecke $(0, 2l)$ zu analysieren, dann zeichnen wir (Bild 1) die Funktionen $f(x)$, $f(2l-x)$, $-f(2l-x)$ für $0 \leq x \leq l$ ein. Zunächst sei (bei der normalen Einrichtung des Analysators) $2,5 \text{ cm} \leq 2l \leq 36 \text{ cm}$. Wir stellen den Analysator so über das Zeichenblatt, daß die Strecke $(0, 2l)$ der Schwenkbereich des Fahrarmes ist.

Wir schreiben die Fourierkoeffizienten

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} [f(x) + f(2l-x)] \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} [f(x) - f(2l-x)] \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned} \right\} \cdot (1').$$

Der Analysator sei mit den Zahnrädern für $n = 1, 2, 3, \dots, k$ ausgestattet. Dann bekommen wir a_n nach (1) und (1') bei Verwendung des n -ten Zahnrades und „Einsatz C“ des Planimeterstiftes mit Hilfe der Umfahrung $f(x) + f(2l-x)$ auf der Strecke $(0, l)$. In Bild 1 ist das die Umfahrung $ADEFGHA$, wir wollen sie kurz die Umfahrung C nennen. Ebenso bekommen wir b_n mit demselben Zahnrad und dem Planimeteinsatz S durch die Umfahrung $f(x) - f(2l-x)$ auf der Strecke $(0, l)$, im Bild $ADECB$, welche kurz die Umfahrung S heißen soll. a_0 ergibt sich, wenn man unmittelbar mit dem Planimeterstift (Planimeteinsatz P) die Umfahrung C ausführt.

Alle diese Umfahrungen liefern übrigens dasselbe, wenn die Strecke $(0, l)$ nicht gerade die linke Hälfte des Schwenkbereiches des Fahrarmes ist, sondern irgendwo in diesem Schwenkbereich weiter rechts liegt. Wichtig ist nur, daß der Planimeterstift beim Einsatz C für $x = 0$ „oben“, beim Einsatz S „links“ liegt.

Weil Addition einer Konstanten zu $f(x)$ nur $a_0/2$ um sie vermehrt, die anderen Fourierkoeffizienten aber überhaupt nicht ändert, kann man durch Addition einer geeigneten Konstanten zu $f(x)$, d. h. durch günstige Wahl der x -Achse den in der y -Richtung vom Fahrstift zurückzulegenden Weg möglichst abkürzen. Ist $f(x)$ in $x = 0$ stetig, dann ist $A = B$ und es wird, wenn man die x -Achse durch A legt, $A = B = H$.

2. Zum Nyströmschen Verfahren

a) Für gerades $n = 2m$ sind

$$\left. \begin{aligned} 2a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) + f(2l-x)] \cos \frac{m\pi x}{l} dx \\ 2b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) - f(2l-x)] \sin \frac{m\pi x}{l} dx \end{aligned} \right\} \cdot (2)$$

Fourierkoeffizienten der in $(0, l)$ als $f(x) + f(2l-x)$ und $f(x) - f(2l-x)$ definierten und mit der Periode l periodisch fortgesetzten Funktionen. Der Analysator liefert sie durch Analyse auf der Periodenstrecke $(0, l)$ mit dem Zahnrad m . Dabei darf $2,5 \text{ cm} \leq l \leq 36 \text{ cm}$ sein, so daß man hierbei für $f(x)$ bis zu Perioden von $2l = 72 \text{ cm}$ kommt. Hierfür bringen wir die Strecke $(0, l)$ in die Mitte des Schwenkbereiches des Fahrarmes. Diese Lage sei im folgenden immer beibehalten.

b) Die a_n und b_n für ungerades $n = 2m - 1$ bekommen wir, indem wir auch in diesen Fällen die Integrale (1') mit dem Nyströmschen Verfahren behandeln. Wie stellen die Fahrarmlänge auf $2ml/n$ und setzen das m -te Zahnrad ein. Dann umfahren wir zur Bestimmung von a_n nach Einsetzen des Planimeterstiftes in C auf der Strecke $(0, l) f(x) + 2l - x$, zur Bestimmung von b_n mit dem Planimeterstift in S auf derselben Strecke $f(x) - f(2l - x)$. Dabei achten wir darauf, daß beim Beginne des Umlaufs, d. h. bei $x = 0$, je nachdem wir a_n oder b_n ermitteln wollen, der Einsatzzpunkt des Planimeterstiftes „oben“, bzw. links steht. Diese Einsätze mögen C_m und S_m heißen. Multiplizieren wir dann noch die entstehenden Planimeterdifferenzen aus den von Nyström angegebenen Gründen mit m/n , dann erhalten wir a_n und b_n . Das geht, solange das m -te Zahnrad vorhanden ist und $\frac{2ml}{n}$ auf dem Fahrarm einstellbar ist. Da von

den Zahlen $\frac{m}{2m-1}$ für $m = 2, 3, \dots 2/3$ die größte ist und auf dem Fahrarm $37\frac{1}{2}$ gerade noch eingestellt werden kann, kann man auf diese Weise noch auf Perioden von 56 cm analysieren.

3. Bestimmung von a_1 und b_1 .

Wir verstehen unter $\gamma(x)$ und $\delta(x)$ die folgenden Funktionen:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin 2x & \text{,, } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{mit der Periode } 2\pi \text{ (Bild 2),}$$

$$\delta(x) = \gamma(x + \pi/2) \text{ (Bild 3).}$$

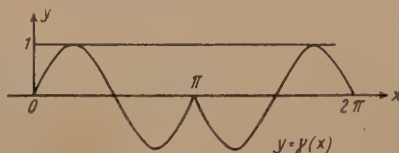


Bild 2.

Als ihre Fourierentwicklungen berechnet man leicht

$$\left. \begin{aligned} \gamma(x) &= -\frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m-1)(2m+3)} \\ &= \frac{8}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 3x}{1 \cdot 5} + \frac{\cos 5x}{3 \cdot 7} - \frac{\cos 7x}{5 \cdot 9} + \dots \right), \\ \delta(x) &= \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin(2m+1)x}{(2m-1)(2m+3)} \\ &= \frac{8}{\pi} \left(-\frac{\sin x}{3} + \frac{\sin 3x}{1 \cdot 5} - \frac{\sin 5x}{3 \cdot 7} + \frac{\sin 7x}{5 \cdot 9} \pm \dots \right) \end{aligned} \right\} \dots (3).$$

Daraus gewinnen wir

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= \frac{3\pi}{8} \gamma(x) + \frac{3 \cos 3x}{1 \cdot 5} + \frac{3 \cos 5x}{3 \cdot 7} + \frac{3 \cos 7x}{5 \cdot 9} + \dots \\ \sin x &= -\frac{3\pi}{8} \delta(x) - \frac{3 \sin 3x}{1 \cdot 5} + \frac{3 \sin 5x}{3 \cdot 7} - \frac{3 \sin 7x}{5 \cdot 9} \pm \dots \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

Damit wird

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{\pi x}{l} dx \\ &= \frac{3\pi}{8l} \int_0^{2l} f(x) \gamma\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx + \frac{3}{1 \cdot 5} a_3 + \frac{3}{3 \cdot 7} a_5 + \frac{3}{5 \cdot 9} a_7 + \dots \\ b_1 &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx \\ &= -\frac{3\pi}{8l} \int_0^{2l} f(x) \delta\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx - \frac{3}{1 \cdot 5} b_3 + \frac{3}{3 \cdot 7} b_5 - \frac{3}{5 \cdot 9} b_7 \pm \dots \end{aligned} \right\} \dots (5).$$

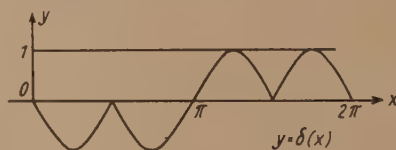


Bild 3.

Die Integrale

$$\begin{aligned} g &= \frac{2}{l} \int_0^{2l} f(x) \gamma\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) + f(2l-x)] \sin \frac{2\pi x}{l} dx, \\ s &= \frac{2}{l} \int_0^{2l} f(x) \delta\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) - f(2l-x)] \delta\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} [-f(x) + f(2l-x)] \sin \frac{2\pi x}{l} dx \\ &\quad + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l [f(x) - f(2l-x)] \sin \frac{2\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

werden vom Analysator mit dem Planimereinsatz S_1 geliefert, und zwar erhalten wir g durch die Umfahung C , s durch eine Umfahung X , die wir am deutlichsten durch die Umfahung $ABCDECA$ in der einfachen Zeichnung Bild 1 beschreiben.

Auf diese Weise bekommen wir

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3\pi}{16} g + \frac{3}{1 \cdot 5} a_3 + \frac{3}{3 \cdot 7} a_5 + \frac{3}{5 \cdot 9} a_7 + \dots \\ &= 0,589 g + 0 \cdot 6 a_3 + \frac{1}{7} a_5 + \frac{1}{15} a_7 + \\ &\quad + 0,039 a_9 + \frac{1}{39} a_{11} + \dots \\ b_1 &= -0,589 s - 0 \cdot 6 b_3 + \frac{1}{7} b_5 - \frac{1}{15} b_7 + \\ &\quad + 0,039 b_9 - \frac{1}{39} b_{11} \pm \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_n, b_n sind schon für $2 \leq n \leq 2k$ berechnet. Man kann also die Reihen (5) bis einschließlich der a_{2k-1} und b_{2k-1} enthaltenden Glieder

berechnen. Die nachfolgenden Glieder zu vernachlässigen ist durch die folgende Abschätzung gerechtfertigt.

Es sei

$$A_{2k+1} = \frac{3\pi}{16} g + \frac{3}{1 \cdot 5} a_3 + \dots + \frac{3}{(2k-1)(2k+3)} a_{2k+1} \\ = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \left[\frac{3\pi}{8} \gamma \left(\frac{\pi x}{l} \right) + \frac{3}{1 \cdot 5} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots + \frac{3}{(2k-1)(2k+3)} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{l} \right] dx.$$

Dann ist

$$a_1 - A_{2k+1} = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \left[\frac{3}{(2k+1)(2k+5)} \cos \frac{(2k+3)\pi x}{l} + \dots \right] dx \\ = -\frac{3\pi}{8l} \int_0^{2l} [f(x) - f_{2k+2}(x)] \gamma \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx,$$

wo

$$f_{2k+2}(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + \dots + a_{2k+2} \cos \frac{(2k+2)\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \dots + b_{2k+2} \sin \frac{(2k+2)\pi x}{l}$$

ist.

Weil

$$\frac{1}{l} \int_0^{2l} \gamma^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx = 1$$

ist, erhalten wir mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung⁴⁾

$$(a_1 - A_{2k+1})^2 \leq \frac{9\pi^2}{32} \cdot \frac{1}{2l} \int_0^{2l} [f(x) - f_{2k+2}(x)]^2 dx \\ = \frac{9\pi^2}{32} M_{2k+2}^2.$$

Ebenso ergibt sich für

$$B_{2k+1} = -\frac{3\pi}{16} g - \frac{3}{1 \cdot 5} b_3 + \frac{3}{3 \cdot 7} b_5 - \frac{3}{5 \cdot 9} b_7 + \dots + (-1)^k \frac{3 b_{2k+1}}{(2k-1)(2k+3)} \\ (b_1 - B_{2k+1})^2 \leq \frac{9\pi^2}{32} \cdot \frac{1}{2l} \int_0^{2l} [f(x) - f_{2k+2}(x)]^2 dx \\ = \frac{9\pi^2}{32} M_{2k+2}^2.$$

Die Fehler der Näherungswerte A_{11} und B_{11} von a_1 und b_1 sind also absolut genommen nicht größer als

$$^*) \int_a^b u(x) v(x) dx \leq \int_a^b [u(x)]^2 dx \int_a^b [v(x)]^2 dx; \text{ vgl. W. Rogo-} \\ \text{sinski, Fouriersche Reihen, S. 133. Samml. Götschen 1930.}$$

$1,67 M_{2k+2}$, wo M_{2k+2} der mittlere Fehler (im Sinne der Fehlerquadrate) von $f_{2k+2}(x)$ ist. Da dieser nicht größer, in der Regel aber viel kleiner ist als die Fehler von f_{2k+2} ist und man diese schon in Kauf nimmt, wenn man f_{2k+2} als Ersatz für f nimmt, ist es gerechtfertigt A_{2k+1} und B_{2k+1} an Stelle von a_1 und b_1 zu nehmen; z. B. ergibt sich bei der Funktion

$$k(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\pi}{4} (2\pi - x) & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$$

welche die Fourierentwicklung

$$k(x) = \frac{\pi^2}{8} - \cos x - \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 5x}{5^2} - \dots$$

hat, durch rechenndes Verfolgen der Definition von A_{11} $A_{11} = -0,9997$, während $a_1 = -1$ ist. Das Maximum des Fehlers der Näherungsfunktion $k_{12}(x)$ wird an der Stelle π angenommen. Dort ist $k(\pi) = 2,464$, $k_{12}(\pi) = 2,423$, der Fehler also ungefähr 100 mal so groß wie der von A_{11} . $1,67 M_{12} = 0,012$.

Übersicht

1. $2l \leq 36$ cm. Die Mitte des Schwenkbereiches liegt bei $x = l$.

	a_0	$1 \leq n \leq k$		$m = 2, 3, 4, \dots, k$			
		a_n	b_n	a_{2m-1}	b_{2m-1}	a_{2m}	b_{2m}
Fahrarm-einstellung	—	$2l$	$2l$	$\frac{2lm}{2m-1}$	$\frac{2lm}{2m-1}$	l	l
Einsatz des Planimeter-fahrtstiftes	P	C_n	S_n	C_m	S_m	C_m	S_m
Umfahrung	C	C	S	C	S	C	S
Die Planimeter-messung ist zu multiplizieren mit	$\frac{1}{l}$	1	1	$\frac{m}{2m-1}$	$\frac{m}{2m-1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. $36 \text{ cm} < 2l \leq 56$ cm. Die Mitte des Schwenkbereiches liegt bei $x = l/2$.

	a_0	$m = 2, 3, 4, \dots, k$				g	s
		a_{2m-1}	b_{2m-1}	a_{2m}	b_{2m}		
Fahrarm-einstellung	—	$\frac{2lm}{2m-1}$	$\frac{2lm}{2m-1}$	l	l	l	l
Einsatz des Planimeter-fahrtstiftes	P	C_m	S_m	C_m	S_m	S_1	S_1
Umfahrung	C	C	S	C	S	C	X
Die Planimeter-messung ist zu multiplizieren mit	$\frac{1}{l}$	$\frac{m}{2m-1}$	$\frac{m}{2m-1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$

Innsbruck.

L. Vietoris.

Entfernungsmittelwerte bei der Ellipse.

Anlässlich einer Analyse des astronomischen Grundbegriffes der „Mittleren Entfernung der Erde von der Sonne“ untersucht Emersleben¹⁾ den Mittelwert aller Entfernungen eines Ellipsenpunktes von einem Brennpunkt, wobei sowohl über den Polarwinkel als auch bei konstanter Flächengeschwindigkeit über die Zeit gemittelt wird.

¹⁾ O. Emersleben: Die mittlere Entfernung Sonne-Planet. Astr. Nachrichten 275, Heft 5/6 (1947) S. 263.

Verallgemeinert kann man das kinematische Problem der Bestimmung der mittleren Entfernung eines mit vorgegebener Geschwindigkeit auf einer Ellipse umlaufenden Punktes vom Mittelpunkt oder einem Brennpunkt aus betrachten. Wir unterscheiden im folgenden die drei Fälle: 1. konstante Winkelgeschwindigkeit, 2. konstante Flächengeschwindigkeit, 3. konstante Bahngeschwindigkeit. Es seien r und φ bzw. ϱ und ψ Radiusvektor und Polarwinkel bezogen auf einen Brennpunkt bzw. auf den Mittelpunkt. Es ist dann

$$r = \frac{p}{1 + k \cos \varphi} \quad (1a), \quad \varrho = \frac{b}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi}} \quad (1b),$$

wenn

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \dots \quad (2)$$

Halbparameter und numerische Exzentrizität bezeichnen. Die Entfernungsmittelwerte sind dann bzw. gegeben durch

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \int_0^T r(\varphi(t)) dt \quad \dots \quad (3a)$$

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{T} \int_0^T \varrho(\psi(t)) dt \quad \dots \quad (3b)$$

oder auch

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{r(\varphi)}{\dot{\varphi}} d\varphi \quad \dots \quad (4a)$$

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho(\psi)}{\dot{\psi}} d\psi \quad \dots \quad (4b),$$

wenn $\dot{\varphi}$ bzw. $\dot{\psi}$ die Winkelgeschwindigkeit, T die Umlaufzeit, t die laufende Zeit bedeuten.

1. Fall: Konstante Winkelgeschwindigkeit.

a) Bezogen auf den Brennpunkt:

Mit $\dot{\varphi} T = 2\pi$ und der Integralformel²⁾

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + k \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - k^2}} \quad \dots \quad (5)$$

erhält man nach (4a) und (1a) das bekannte Ergebnis³⁾

$$\bar{r}_1 = \frac{p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + k \cos \varphi} = \frac{p}{\sqrt{1 - k^2}} = b \quad \dots \quad (6).$$

Der Mittelwert aller Entfernungen ist also gleich der kleinen Halbachse, wie auch in der Arbeit von Emersleben gezeigt wird.

b) Bezogen auf den Mittelpunkt:

Mit $\dot{\psi} T = 2\pi$ ergeben (4b) und (1b)

$$\bar{\varrho}_1 = \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi}} \quad \dots \quad (7)$$

oder

$$\bar{\varrho}_1 = \frac{2b}{\pi} \cdot K(k) \quad \dots \quad (8),$$

wenn K das vollständige elliptische Normalintegral 1. Gattung bezeichnet. Unter Benutzung des Gauß-

schen arithmetisch-geometrischen Mittels M gilt bekanntlich⁴⁾

$$K(k) = \frac{\pi}{2 M(1, \sqrt{1 - k^2})} \quad \dots \quad (9).$$

$$\text{Da } \sqrt{1 - k^2} = \frac{b}{a} \quad \text{und } ^4) \quad M\left(1, \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a} M(a, b)$$

ergibt (8) als Mittelwert aller auf den Ellipsenmittelpunkt bezogenen Entfernungen bei konstanter Winkelgeschwindigkeit den einfachen Wert

$$\bar{\varrho}_1 = \frac{a \cdot b}{M(a, b)} \quad \dots \quad (10).$$

Ein Vergleich von (6) und (8) ergibt, da $K > \frac{\pi}{2}$

$$\bar{\varrho}_1 > \bar{r}_1 \quad \text{für } 0 < k < 1 \quad \dots \quad (11).$$

Da alle Mittelwerte in Abhängigkeit von der Exzentrizität k bei konstanter großer Halbachse betrachtet werden sollen, schreiben wir für (6)

$$\bar{r}_1 = a \sqrt{1 - k^2} \quad \dots \quad (12)$$

und für (8)

$$\bar{\varrho}_1 = \frac{2a}{\pi} \sqrt{1 - k^2} \cdot K(k) \quad \dots \quad (13).$$

Mit $k' = \sqrt{1 - k^2}$ gilt⁵⁾

$$\lim_{k' \rightarrow 0} \frac{K(k)}{\ln \frac{4}{k'}} = 1 \quad \dots \quad (14),$$

so daß

$$\lim_{k \rightarrow 1} \bar{\varrho}_1 = \frac{2a}{\pi} \lim_{k \rightarrow 1} k' K(k) = \frac{2a}{\pi} \lim_{k' \rightarrow 0} k' \ln \frac{4}{k'} = 0 \quad (15).$$

Für $k = 1$ sind also beide Mittelwerte Null (s. Bild)

2. Fall: Konstante Flächengeschwindigkeit.

a) Bezogen auf den Brennpunkt.

Diesen Fall behandelt Emersleben. Da bei konstanter Flächengeschwindigkeit

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{ab\pi}{T} \quad \dots \quad (15)$$

gilt, ergeben (4a) und (1a):

$$\bar{r}_2 = \frac{p^3}{2ab\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + k \cos \varphi)^3} \quad \dots \quad (17).$$

Für das letzte Integral findet Emersleben

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + k \cos \varphi)^3} = 2\pi \frac{1 + \frac{k^2}{2}}{(1 - k^2)^{5/2}} \quad \dots \quad (18),$$

so daß (17) nach einfacher Umformung in

$$\bar{r}_2 = a \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) \quad \dots \quad (19)$$

übergeht. Dieser Mittelwert ist größer als a und nähert sich für $k \rightarrow 1$ dem Grenzwert $3a/2$, während die unter 1 betrachteten Mittelwerte sämtlich dem Wert Null zustreben.

b) Bezogen auf den Mittelpunkt.

Wie unter a) erhält man

$$\bar{\varrho}_2 = \frac{1}{2ab\pi} \int_0^{2\pi} \varrho^3 d\psi = \frac{b^2}{2a\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \cos^2 \psi)^3}} \quad (20),$$

²⁾ Siehe z. B. A. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien, Braunschweig: Vieweg 1924, 4. Aufl., S. 773.

³⁾ Siehe z. B. R. R. Rothe: Höhere Mathematik, Bd. II, 2. Aufl., S. 80. Teubner 1931.

⁴⁾ K o m m e r e l l: Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik. Leipzig: K. F. Köhler 1931.

⁵⁾ J a h n k e - E m d e: Funktionen-Tafeln. Teubner 1938, 3. Aufl., S. 73.

wofür auch wieder

$$\bar{e}_3 = \frac{2p}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2 \cos \psi)^3}} \dots (21)$$

geschrieben werden kann. Dieses Integral ist aber durch das elliptische Normalintegral 2. Gattung E ausdrückbar⁶⁾, nämlich

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2 \cos \psi)^3}} = \frac{E(k)}{1-k^2} \dots (22),$$

so daß folgt

$$\bar{e}_3 = \frac{2p}{\pi} \frac{E(k)}{1-k^2} \quad \text{bzw.} \quad \bar{e}_3 = \frac{2a}{\pi} \cdot E(k) \quad (23).$$

3. Fall: Konstante Bahngeschwindigkeit v .

a) Bezogen auf den Brennpunkt.

Nach (3a) ist

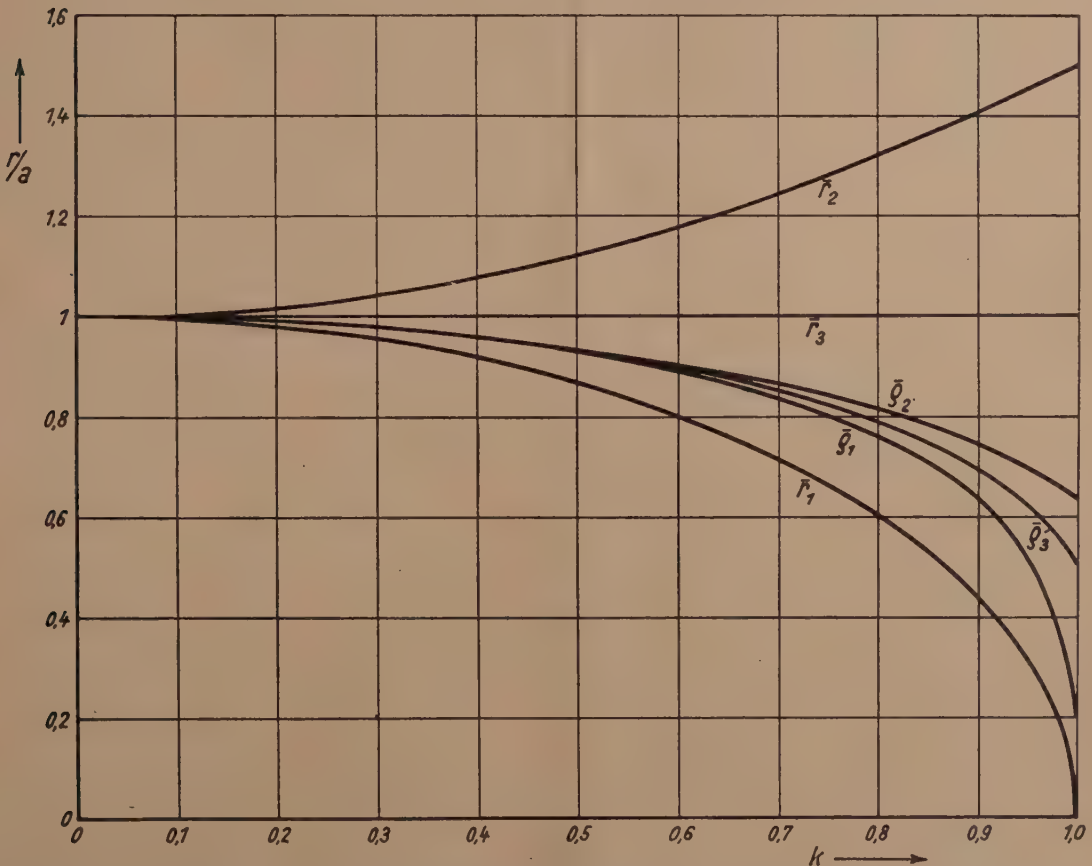
$$\bar{r}_3 = \frac{1}{T} \int_0^T r dt = \frac{1}{vT} \int_0^T r ds = \frac{1}{vT} \int_0^{2\pi} r \sqrt{r'^2 + r'^2} d\varphi \quad (27).$$

Da der Ellipsenumfang

$$4aE(k) = vT$$

ist, ergibt sich mit (1b) nach einfacher Umformung

$$\bar{r}_3 = \frac{p^2}{2aE} \int_0^\pi \frac{\sqrt{1+2k \cos \varphi + k^2}}{(1+k \cos \varphi)^3} d\varphi \dots (28)$$



Man erhält also einen Wert, der ganz entsprechend gebaut ist, wie \bar{e}_1 nach (8). Wie das Bild zeigt, fallen \bar{e}_1 und \bar{e}_3 für kleine k^2 praktisch zusammen. Diese bestätigen auch die Reihenentwicklungen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_1 &= a \left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{7}{64} k^4 - \dots \right) \\ \bar{e}_3 &= a \left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 - \dots \right) \end{aligned} \right\} k^2 < 1 \dots (24),$$

die zeigen, daß \bar{e}_3 für kleine k^2 sich nur um Glieder von der Größenordnung k^4 von \bar{e}_1 unterscheidet. Stets ist

$$\bar{e}_2 > \bar{e}_1, \quad \text{da} \quad \frac{E}{K} > \sqrt{1-k^2} \dots (25)$$

und

$$\lim_{k \rightarrow 1} \bar{e}_2 = \frac{2}{\pi} \cdot a \dots (26).$$

Führt man in dem letzten Integral $\vartheta = \varphi/2$ ein und benutzt die Beziehung $\cos 2\vartheta = 1 - 2 \sin^2 \vartheta$, so erhält man

$$\bar{r}_3 = \frac{p^2}{aE} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{(1+k)^2 - 4k \sin^2 \vartheta}}{(1+k-2k \sin^2 \vartheta)^3} d\vartheta \dots (29).$$

Führt man die Abkürzungen ein

$$\frac{4k}{(1+k)^2} = k_1^2 \leq 1 \dots (30)$$

$$\frac{2k}{1+k} = k_1 \sqrt{k} = n \leq 1,$$

so geht (29) über in

$$\bar{r}_3 = \frac{a}{E(k)} (1-k^2)^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \vartheta}}{(1-n \sin^2 \vartheta)^3} d\vartheta \quad (31).$$

⁶⁾ Jahnke-Emde: l.c. S. 56.

Setzt man $\sin \vartheta = u$, so wird

$$\bar{r}_3 = \frac{a}{E(k)} \cdot (1-k)^2 \cdot \int_0^1 \frac{1-k_1^2 u^2}{(1-nu^2)^3} \cdot \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_1^2 u^2)}} \quad \dots (32).$$

Wendet man auf die rationale Funktion unter dem Integralzeichen Partialbruchzerlegung an und führt die Abkürzung ein

$$\int_0^1 \frac{du}{(1-nu^2)^v \sqrt{(1-u^2)(1-k_1^2 u^2)}} = Z_v \quad (33),$$

so folgt

$$\bar{r}_3 = \frac{a}{E(k)} \frac{(1-k)^2}{1+k} (2Z_2 - (1-k)Z_3) \quad (34).$$

Die Integrale Z_v lassen sich mit Hilfe einer Rekursionsformel⁷⁾ auf Z_1, Z_0, Z_{-1} zurückführen. Die Durchführung ergibt:

$$\bar{r}_3 = \frac{a}{E(k)} (1-k) \left(\frac{1-k}{2} Z_1 + \frac{1}{1-k} Z_{-1} - \frac{1}{2} Z_0 \right) \quad (35).$$

Nun ist aber

$$Z_0 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_1^2 u^2)}} = K(k_1) \quad \dots (36),$$

$$Z_{-1} = \int_0^1 \frac{1-nu^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_1^2 u^2)}} du = K(k_1) + \frac{n}{k_1^2} (E(k_1) - K(k_1)) \quad (37)$$

oder unter Benutzung von (30)

$$Z_{-1} = \frac{1-k}{2} K(k_1) + \frac{1+k}{2} E(k_1) \quad (38)$$

und

$$Z_1 = \int_0^1 \frac{du}{(1-nu^2) \sqrt{(1-u^2)(1-k_1^2 u^2)}} = \Pi(n, k_1) \quad (39).$$

das vollständige elliptische Normalintegral 3. Gattung, so daß (35) in

$$\bar{r}_3 = \frac{a}{2E(k)} (1-k) \left\{ (1-k) \Pi(n, k_1) + \frac{1+k}{1-k} E(k_1) \right\} \quad (40)$$

übergeht.

Die numerische Auswertung von (40) mit Hilfe der Legendreschen und Heumannschen⁸⁾ Tafeln legte die Vermutung nahe, daß \bar{r}_3 den konstanten Wert a hat. Der Beweis dieser Vermutung gelingt wie folgt: Löst man die Legendresche Beziehung⁹⁾

$$K(k) = \frac{2E(k) - (1+k)E(k_1)}{1-k^2} \quad (41)$$

⁷⁾ Serret-Scheffers Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Bd. II, 4. u. 5. Aufl., S. 93. Teubner 1911.

⁸⁾ Carl Heumann: Tables of complete elliptic integrals. J. Mathematics Physics. Vol. XX, Nr. 2 (1941).

⁹⁾ Enneper: Elliptische Funktionen. Halle 1876, S. 316, Formel (21).

nach $E(k_1)$ auf und führt es in (40) ein, so folgt

$$\bar{r}_3 = a + \frac{a(1-k)}{2E(k)} \left\{ (1-k) \Pi(n, k_1) - (1+k) K(k) \right\} \quad (42).$$

Da nach der Gaußschen Transformation

$$K(k) = \frac{1}{1+k} K(k_1) \quad \dots (43),$$

hat man

$$\bar{r}_3 = a + \frac{a(1-k)}{2E(k)} \left\{ (1-k) \Pi(n, k_1) - K(k_1) \right\} \quad (44).$$

Ferner ergibt (30)

$$1-k = \frac{2k'_1}{1+k'_1}; \quad n = 1-k'_1 \quad (45)$$

mit

$$k'_1 = \sqrt{1-k_1^2},$$

so daß (44) in

$$\bar{r}_3 = a + \frac{a(1-k)}{2E(k)} \left\{ \frac{2k'_1}{1+k'_1} \Pi(1-k'_1, k_1) - K(k_1) \right\} \quad (46)$$

übergeht. Benutzt man schließlich eine ebenfalls auf Legendre zurückgehende Beziehung¹⁰⁾, die es gestattet, den Parameter eines elliptischen Integrals 3. Gattung auf einen anderen zu transformieren, nämlich

$$-K(k) + \cos^2 \alpha \Pi(k^2 \sin^2 \alpha, k) + \frac{k'^2 \sin^2 \alpha}{1-k^2 \sin^2 \alpha} \cdot \Pi\left(\frac{k^2 \cos^2 \alpha}{1-k^2 \sin^2 \alpha}, k\right) = 0 \quad (47)$$

und setzt in ihr $\tan^2 \alpha = 1/k'$, so wird

$$\cos^2 \alpha = \frac{k'^2 \sin^2 \alpha}{1-k^2 \sin^2 \alpha} = \frac{k'}{1+k'} \quad (48)$$

$$k^2 \sin^2 \alpha = \frac{k^2 \cos^2 \alpha}{1-k^2 \sin^2 \alpha} = 1-k' \quad (49)$$

und (47) ergibt

$$-K(k) + \frac{2k'}{1+k'} \Pi(1-k', k) = 0 \quad (50).$$

Denkt man sich für k, k_1 geschrieben, so zeigt (50) das Verschwinden der eckigen Klammer in (46) an, womit man den bemerkenswert einfachen Wert

$$\bar{r}_3 = a \quad (51)$$

erhält.

b) Bezogen auf den Mittelpunkt.

Wie in (27) gilt jetzt

$$\bar{\varrho}_3 = \frac{1}{vT} \int_0^{2\pi} \varrho \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} d\psi \quad (52).$$

Setzt man (1b) ein und führt die Differentiation aus, so folgt nach einfacher Umformung

$$\bar{\varrho}_3 = \frac{b^2}{vT} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1-k_2^2 \cos^2 \psi}}{(1-k^2 \cos^2 \psi)^2} d\psi \quad (53)$$

mit

$$k_2^2 = k^2(2-k^2) \leq 1 \quad (54)$$

oder auch

$$\bar{\varrho}_3 = \frac{p}{E(k)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-k_2^2 \sin^2 \psi}}{(1-k^2 \sin^2 \psi)^2} d\psi \quad (55).$$

Setzt man $\sin \psi = u$, so wird

$$\bar{\varrho}_3 = \frac{p}{E(k)} \int_0^1 \frac{1-k_2^2 u^2}{(1-k^2 u^2)^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k_2^2 u^2)}} \quad (56).$$

¹⁰⁾ Enneper: l.c., S. 179, Formel (15) für $\varphi = \pi/2$.

Führt man dieses elliptische Integral auf die Normalform zurück unter Benutzung des von (32) nach (40) führenden Weges, so erhält man

$$\bar{e}_3 = \frac{p}{2E(k)} \left(K(k_2) + \frac{1}{1-k^2} E(k_2) \right) \quad (57)$$

oder

$$\bar{e}_3 = \frac{a}{2E(k)} \left(k'^2 K(k_2) + E(k_2) \right) \quad (58)$$

$$k_2^2 = k^2(2 - k^2), \quad k'^2 = 1 - k^2.$$

mit

Der Grenzwert dieses Ausdruckes für $k \rightarrow 1$ ergibt sich zu $a/2$, da wegen (14)

$$\lim_{k \rightarrow 1} k'^2 K(k_2) = 0 \quad (59)$$

und

$$\lim_{k \rightarrow 1} E(k) = \lim_{k \rightarrow 1} E(k_2) = 1 \quad (60).$$

Die numerisch festgestellte Größenbeziehung $\bar{e}_1 < \bar{e}_3 < \bar{e}_2$ wird auch für hinreichend kleine k^2 durch die Reihenentwicklung

$$\bar{e}_3 = a \left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{5}{64} k^4 - \dots \right) \quad k^2 < 1 \quad (61)$$

im Vergleich zu (24) bestätigt.

Alle betrachteten Mittelwerte sind auf dem Bild für $a = 1$ in Abhängigkeit von k dargestellt.

Braunschweig.

A. Fricke.

Fehlerausgleichung bei Funktionen in Parameterdarstellung.

Während das Verfahren zur Fehlerausgleichung explizit gegebener Funktionen allgemein bekannt ist, findet man dieses Problem für Funktionen in Parameterform nicht dargestellt. Als Verallgemeinerung der bisher üblichen Aufgabe soll es im folgenden behandelt werden. Die Anregung dazu ergab sich aus Untersuchungen über das Dampfgleichgewicht verschiedenatomigen Schwefels im hiesigen Phys.-Chem. Institut.

Der Zusammenhang zweier Variablen x und y sei in Parameterdarstellung gegeben

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u) \quad (1)$$

mit dem laufenden Parameter t und der Konstanten u , deren Wert aus zwei zugeordneten Meßreihen

$$\begin{aligned} x &= X_1, X_2, \dots, X_\nu, \dots, X_n \\ y &= Y_1, Y_2, \dots, Y_\nu, \dots, Y_n \end{aligned} \quad (2)$$

zu bestimmen ist.

Zunächst möge zur Kennzeichnung des Verfahrens der bekannte Sachverhalt skizziert werden für den Fall, daß der Parameter t eliminiert werden kann. Man erhält dann den Zusammenhang in der Form

$$y = h(x, u) \quad (3).$$

Die Konstante u bestimmt man nach dem Prinzip des kleinsten Fehlerquadrats, indem man die Ordinatenabweichung von Meßwert und gesuchter Kurve bildet und ihre Quadratsumme zum Minimum macht:

$$\sum_{\nu=1}^n [Y_\nu - h(X_\nu, u)]^2 = \text{Min} \quad (4).$$

Die Meßwerte X_ν werden dabei als fehlerfrei angesehen.

Dieses im allgemeinen nichtlineare Problem linearisiert man mit Hilfe eines geeigneten Näherungswertes \bar{u} und erhält mit $u = \bar{u} + \delta u$ bei Beschränkung auf das lineare Glied der Korrektur δu eine einfache Ersatzfunktion für $h(X_\nu, u)$:

$$h(X_\nu, u) = h(X_\nu, \bar{u}) + \frac{\partial h}{\partial u}(X_\nu, \bar{u}) \delta u.$$

Mit den Abkürzungen

$$y_\nu = h(X_\nu, \bar{u}), \quad \frac{\partial y_\nu}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u}(X_\nu, \bar{u}),$$

indem man die verschiedenen Abszissen durch den Index ν kennzeichnet, ergibt sich

$$h(X_\nu, u) = y_\nu + \frac{\partial y_\nu}{\partial u} \delta u$$

und damit an Stelle von (4) die folgende Form

$$\sum_{\nu=1}^n \left[Y_\nu - y_\nu - \frac{\partial y_\nu}{\partial u} \delta u \right]^2 = \text{Min.} \quad (5),$$

deren Normalgleichung linear in der Korrektur δu wird. Das Verfahren wird sodann mit dem verbesserten Näherungswerte $\bar{u} = \bar{u} + \delta u$ wiederholt und solange fortgesetzt, bis die verlangte Genauigkeit erreicht ist.

Wenn nun die Elimination des Parameters t in (1) nicht möglich ist, so liegt die Aufgabe vor, die Quadratsumme der Ordinatenabstände zum Minimum zu machen

$$\sum_{\nu=1}^n [Y_\nu - g(t_\nu, u)]^2 = \text{Min.} \quad (6)$$

unter der Nebenbedingung

$$f(t_\nu, u) = X_\nu \quad (7),$$

die zum Ausdruck bringt, daß diejenigen Ordinaten zu wählen sind, die zu den festen x -Werten der Meßpunkte gehören. Infolge der Nebenbedingung hängen die Parameterwerte t_ν in komplizierter Weise von der gesuchten Größe u ab, so daß man im allgemeinen linearisieren muß.

Wir denken uns mit einem geeigneten \bar{u} eine Näherungskurve ermittelt, die infolge der Parameterdarstellung nach t beziffert ist, und darauf diejenigen Punkte x_ν, y_ν mit ihren Bezifferungen \bar{t}_ν markiert, die zu den Meßpunkten X_ν, Y_ν gehören, und zwar so, daß $x_\nu = X_\nu$ wird,

$$f(\bar{t}_\nu, \bar{u}) = X_\nu \quad (8).$$

Mit diesen Näherungswerten \bar{u} und \bar{t}_ν schreiben wir

$$u = \bar{u} + \delta u, \quad t_\nu = \bar{t}_\nu + \delta t_\nu$$

und entwickeln die in (6) und (7) auftretenden Funktionen bis zu den linearen Gliedern

$$f(t_\nu, u) = f(\bar{t}_\nu, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}_\nu, \bar{u}) \delta t_\nu + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{t}_\nu, \bar{u}) \delta u \quad (9),$$

$$g(t_\nu, u) = g(\bar{t}_\nu, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{t}_\nu, \bar{u}) \delta t_\nu + \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{t}_\nu, \bar{u}) \delta u \quad (10).$$

Wegen (7) und (8) entfallen die ersten beiden Glieder in (9), so daß sich aus dieser Gleichung δt_ν durch δu ausdrücken läßt. In (10) eingesetzt ergibt sich

$$g(t_\nu, u) = y_\nu + \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial u} - y'_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial u} \right) \delta u,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{aligned} y_\nu &= g(\bar{t}_\nu, \bar{u}), & \frac{\partial y_\nu}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{t}_\nu, \bar{u}) \\ y'_\nu &= \frac{\frac{\partial g}{\partial t}(\bar{t}_\nu, \bar{u})}{\frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}_\nu, \bar{u})}, & \frac{\partial x_\nu}{\partial u} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{t}_\nu, \bar{u})}{\frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}_\nu, \bar{u})}. \end{aligned}$$

Damit ist in der linearisierten Form der Parameter eliminiert und es ergibt sich an Stelle von (6), (7) eine (5) entsprechende Formulierung

$$\sum_{\nu=1}^n \left[Y_\nu - y_\nu - \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial u} - y'_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial u} \right) \delta u \right]^2 = \text{Min.} \quad (11),$$

die in der üblichen Weise weiterbehandelt werden kann. Weitere Konstante neben u lassen sich analog berücksichtigen.

Ähnliche Darstellungen ergeben sich, wenn man nicht wie hier die Ordinatenabstände, sondern die Abszissen- oder die Normalenabstände oder auch die t -Differenzen in (1) mit (2) unmittelbar ausgleicht.

Hannover.

K. Jaeckel.

Vektoren auf der Kugelfläche.

Zu den Vektoren der Ebene kann man ein interessantes Analogon von gekrümmten Vektoren auf der Kugelfläche angeben. Verbinden wir nämlich mit dem Bogen eines Großkreises der Kugel gleichzeitig eine Richtungsangabe, indem wir den Betrag des Bogens durch c , seinen Durchlaufssinn mit dem Richtungsfaktor c^0 bezeichnen, so gilt für den gerichteten Bogen c , den wir als Kugelvektor bezeichnen wollen,

$$c = c^0 \quad (1).$$

In bezug auf den Bogen von der Größe c spielt also der Richtungsfaktor c^0 lediglich die Rolle des positiven oder negativen Vorzeichens. Analog den goniometrischen Definitionen

$$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x$$

definieren wir für Kugelvektoren

$$\left. \begin{aligned} \sin c &= \sin c^0 = c^0 \sin c; \\ \cos c &= \cos c^0 = \cos c \end{aligned} \right\} \quad (2).$$

Wir definieren ferner in der Art gewöhnlicher Vektoren für ein sphärisches Polygon die (nichtkommutative) Komponentenzerlegung (Bild 1)

$$c = a + b \quad (3)$$

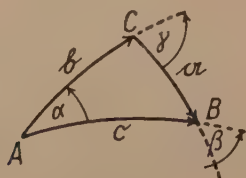


Bild 1.

und verlangen, daß auf Summen von Kugelvektoren die Additionstheoreme der elementaren Goniometrie angewandt werden können. Hierbei treten Produkte der oben eingeführten Richtungsfaktoren auf, die wir Richtungsprodukte nennen wollen. Die Bedeutung solcher Richtungsprodukte von der Form $(a^0 \cdot b^0)$ ergibt sich aus einfachen Sonderfällen.

$$a) \text{ Aus } c = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c, \text{ d. h.}$$

$$\cos c = \cos \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{c}{2} - \sin \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{c}{2}$$

oder

$$\cos c = \cos^2 \frac{c}{2} - \sin^2 \frac{c}{2} (c^0 \cdot c^0)$$

folgt wegen

$$\cos c = \cos^2 \frac{c}{2} - \sin^2 \frac{c}{2}$$

sofort

$$(c^0 \cdot c^0) = 1 \quad (4).$$

b) In einem gleichschenkligen sphärischen Dreieck (Bild 2) mit den Seiten $a = b = 90^\circ$ gilt

$$c = 90^\circ a^0 + 90^\circ b^0, \quad \text{d. h.}$$

$$\cos c = \cos^2 90^\circ - \sin^2 90^\circ (a^0 \cdot b^0).$$

Folglich muß sein

$$(a^0 \cdot b^0) = -\cos c,$$

d. h. gleich dem \cos des von den positiven Richtungen von a^0 und b^0 eingeschlossenen Winkels ($180^\circ - c$), hat also dieselbe Bedeutung wie in (4).

Wir definieren also allgemein: Das Richtungsprodukt $(a^0 \cdot b^0)$ ist gleich dem \cos des von den positiven Richtungen eingeschlossenen Winkels. Es ist kommutativ:

$$(a^0 \cdot b^0) = (b^0 \cdot a^0) = \cos(a^0, b^0) \quad (5).$$

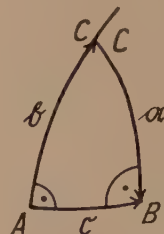


Bild 2.

Für ein beliebiges Dreieck aus Kugelvektoren (Bild 1) ist $c = a + b$ oder

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b (a^0 \cdot b^0), \quad \text{d. h.}$$

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Das ist der bekannte Seiten- \cos -Satz der sphärischen Trigonometrie.

Das soeben betrachtete Richtungsprodukt ergab sich unmittelbar als Folge der trigonometrischen \cos -Operation. Wir können eine ähnliche Festsetzung auch für die \sin -Operation treffen:

$$a) \text{ Aus } c = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c \text{ ergibt sich}$$

$$c^0 \sin c = 2 c^0 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}$$

oder nach Richtungsmultiplikation mit c^0 wegen $(c^0 \cdot c^0) = 1$ richtig

$$\sin c = 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2}.$$

b) Im Dreieck von Bild 2 ist

$$c^0 \sin c = a^0 \sin 90^\circ \cos 90^\circ + b^0 \sin 90^\circ \cos 90^\circ.$$

Da die rechte Seite 0 ist, bleibt diese Beziehung nur richtig, wenn die \sin -Operation noch mit einer sofort anschließenden Richtungsmultiplikation mit a^0 oder b^0 verbunden wird, da ja $(c^0 \cdot a^0) = (c^0 \cdot b^0) = 0$. Da aber ferner $(c^0 \cdot c^0) = 1$ ist, darf nach der \sin -Operation nicht mit c^0 richtungsmultipliziert werden.

Wir gewinnen somit den Satz:

Nach der \sin -Operation muß eine Richtungsmultiplikation mit einem der Richtungsfaktoren der Komponentenvektoren angeschlossen werden, wenn nicht eine andere, weiter unten zu besprechende Drehmultiplikation vorangeht.

In einem beliebigen Vektordreieck (Bild 1) mit $c = a + b$ ist zunächst

$$c^0 \sin c = a^0 \sin a \cos b + b^0 \cos a \sin b.$$

Eine Richtungsmultiplikation mit a^0 bzw. b^0 liefert wegen

$$(a^0 \cdot c^0) = \cos \beta; \quad (a^0 \cdot b^0) = \cos \gamma; \quad (b^0 \cdot c^0) = \cos \alpha$$

den bekannten \sin - \cos -Satz:

$$\sin c \cos \beta = \sin a \cos b + \cos a \sin b \cos \gamma;$$

$$\sin c \cos \alpha = \cos a \sin b + \sin a \cos b \cos \gamma.$$

Die weiteren durch zyklische Vertauschung hieraus entstehenden Formeln ergeben sich auch in analoger Weise aus den Darstellungen

$$a = c - b; \quad b = c - a.$$

Um auch die Winkel zwischen den Richtungen zweier Kugelvektoren erfassen zu können, führen wir ein weiteres Produkt ein, welches wir aus sogleich zu erörternden Gründen Drehprodukt nennen wollen.

Drehen wir den Kugelvektor a (Bild 3) im positiven Winkelsinne in die Richtung von b , so beschreibt der positive Pol (d. i. der Pol, von dem aus die Richtung von a im positiven Winkelsinn erscheint) den Großkreisbogen \bar{c} , der somit im positiven Pol von b endet. Es ist also

$$\bar{c} = \gamma, \text{ d. h. } \bar{c} = \bar{c}^0 \gamma. \quad (6)$$

Wir definieren zweckmäßig das Drehprodukt

$$(a^0 \times b^0) = \sin \bar{c} = \bar{c}^0 \sin \gamma. \quad (7)$$

damit bei senkrechten Vektoren a und b das Drehprodukt ihrer Richtungen die Richtung des Polarsektors \bar{c} ergibt, während das Drehprodukt gleicher Richtungen verschwindet:

$$(a^0 \times a^0) = 0. \quad (7a)$$

Das Drehprodukt ist alternativ:

$$(a^0 \times b^0) = - (b^0 \times a^0). \quad (7b)$$

Zu einem sphärischen Dreieck (Bild 1) $a + b = c$ existiert ersichtlich ein Polardreieck $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ derart, daß

$$\left. \begin{aligned} (a^0 \times b^0) &= \bar{c}^0 \sin \gamma; & (\bar{a}^0 \times \bar{b}^0) &= c^0 \sin c; \\ (a^0 \times c^0) &= \bar{b}^0 \sin \beta; & (\bar{a}^0 \times \bar{c}^0) &= b^0 \sin b; \\ (c^0 \times b^0) &= \bar{a}^0 \sin \alpha; & (\bar{c}^0 \times \bar{b}^0) &= a^0 \sin a; \\ (\bar{a}^0 \cdot \bar{b}^0) &= \cos c; & (\bar{b}^0 \cdot \bar{c}^0) &= \cos a; \\ & & (\bar{c}^0 \cdot \bar{a}^0) &= \cos b. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dies ist der bekannte Ausdruck dafür, daß im Dreieck und Polardreieck Seiten und Winkel vertauscht sind.

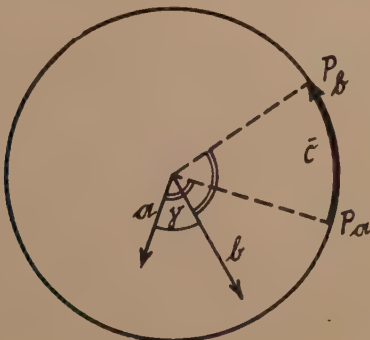


Bild 3.

Für ein gegebenes Dreieck $c = a + b$ auf der Kugel wenden wir die sin-Operation an und erhalten

$$c^0 \sin c = a^0 \sin a \cos b + b^0 \cos a \sin b$$

oder nach Drehmultiplikation mit a^0 oder b^0

$$(c^0 \times a^0) \sin c = (a^0 \times a^0) \sin a \cos b + (b^0 \times a^0) \cos a \sin b;$$

bzw.

$$(c^0 \times b^0) \sin c = (a^0 \times b^0) \sin a \cos b + (b^0 \times b^0) \cos a \sin b,$$

d. h. nach (8) und (7a, c)

$$-\bar{b}^0 \sin c \sin \beta = -\bar{c}^0 \cos a \sin b \sin \gamma;$$

$$\text{bzw. } \bar{a}^0 \sin c \sin \alpha = \bar{c}^0 \sin a \cos b \sin \gamma.$$

Eine Richtungsmultiplikation mit \bar{c}^0 führt diese beiden Gleichungen mit Rücksicht auf (8) über in

$$\sin c \sin \beta = \sin b \sin \gamma, \quad \text{bzw. } \sin c \sin \alpha = \sin a \sin \gamma$$

Das ist der bekannte sin-Satz. — Man überzeugt sich auch hier sehr leicht davon, daß ebenfalls die Drehmultiplikation stets nur von der Komponentenseite her erfolgen darf, so daß der oben ausgesprochene Satz folgende neue Fassung erhält:

Nach der sin-Operation muß eine Richtungsmultiplikation oder eine Drehmultiplikation mit nachfolgender Richtungsmultiplikation angeschlossen werden,

wobei alle Multiplikationen nur von der Komponentenseite her erfolgen dürfen.

Wendet man die bisherigen Entwicklungen auf das Polardreieck $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ an, so folgen die bekannten Polarformeln, auf deren Ableitung hier verzichtet werden kann, da sie dem Vorstehenden analog erfolgt.

Die betrachteten Zusammenhänge lassen sich mit bestimmten Einschränkungen auch auf sphärische Polygone ausdehnen. Wir behandeln als Beispiel ein sphärisches Viereck (Bild 4), bei dem die Seiten a, b, c und die Winkel α und β gegeben sind. Wir schreiben

$$b = a + b + c.$$

Hier ist wegen der nicht-kommutativen Eigenschaft der Summe die richtige Reihenfolge der Vektoren wichtig. Aus den beiden Anordnungen

$$b = (a + b) + c$$

bzw.

$$b = a + (b + c)$$

ergibt sich sofort

$$\cos d = \cos (a + b) \cos c - \sin (a + b) \sin c$$

bzw.

$$\cos d = \cos a \cos (b + c) - \sin a \sin (b + c).$$

In beiden Fällen liefert die weitere Zerlegung wegen

$$(a^0 \cdot b^0) = \cos \alpha; \quad (b^0 \cdot c^0) = \cos \beta;$$

$$\left. \begin{aligned} \cos d &= \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c \cos \alpha \\ &\quad - \sin a \cos b \sin c \cos \beta \\ &\quad - \cos a \sin b \sin c \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

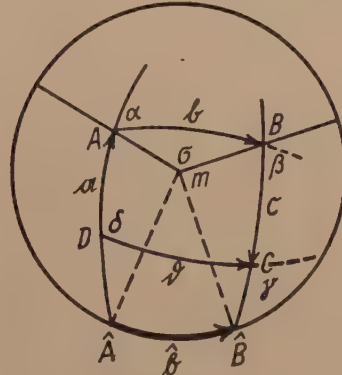


Bild 4.

Hier besteht noch die Frage nach der Bedeutung des Richtungsprodukts $(a^0 \cdot c^0)$ der nicht zusammenstoßenden Vektoren a und c .

Eine Hilfsbetrachtung im Viereck $\hat{A}\hat{A}'\hat{B}\hat{B}'$, in dem $\hat{A}\hat{A}'$ und $\hat{B}\hat{B}'$ gleich 90° gemacht worden sind, liefert für $\hat{A}\hat{B} = \hat{b}$ sofort

$$\hat{b} = 90^\circ a^0 + b + 90^\circ c^0,$$

d. h.

$$\cos \hat{b} = - (a^0 \cdot c^0) \cos b$$

oder

$$(a^0 \cdot c^0) = - \frac{\cos \hat{b}}{\cos b}. \quad (10)$$

Wird $b = 0$, d. h. geht das Viereck in ein Dreieck über, so wird $\hat{b} = 180^\circ - \angle(a, c)$ und $\cos b = 1$; es entsteht also unsere alte Definition (5). Man erkennt aus der Figur nun leicht folgendes: Errichtet man in A und B die zu den Polen führenden sphärischen Senkrechten auf a und c , so schneiden sich diese unter einem Winkel σ . Die Drehung des Dreiecks $AM\hat{A}$ um den Schnittpunkt M führt den Punkt \hat{A} nach einer Drehung um den Winkel \hat{b} in \hat{B} über; dann fallen aber die Rich-

tungen von AM und BM zusammen. Also ist $180^\circ - \sigma = \delta$, so daß (10) übergeht in

$$(\alpha^0 \cdot c^0) = \frac{\cos \sigma}{\cos \delta} \dots \dots (11).$$

Durch eine vektorische Rechnung in der obigen Art oder einfacher durch Anwendung des sphärischen Winkel-cos-Satzes, der ja oben vektorisch herleitbar war, findet man im Dreieck ABM

$$\cos \sigma = -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \delta.$$

Führt man dies in Verbindung mit (11) in (10) ein, so ergibt sich der endgültige Ausdruck für $\cos \delta$, den wir auch nach längerer umständlicher Rechnung durch Benutzung der bekannten elementaren sphärischen Sätze erhalten hätten. — Um den Winkel δ zu erhalten, wenden wir die sin-Operation auf $\delta = a + (b + c)$ an und erhalten nach Richtungsmultiplikation mit c^0

$$\begin{aligned} \sin \delta \cos \delta &= \sin a \cos b \cos c (\alpha^0 \cdot c^0) \\ &+ \cos a \sin b \cos c \cos \beta + \cos a \cos b \sin c \\ &- \sin a \sin b \sin c \cos \alpha, \end{aligned}$$

was mit Rücksicht auf (11) nach längerer Rechnung auch direkt hergeleitet werden könnte. Ebenso ergibt sich ein Ausdruck für $\sin \delta \cos \gamma$ durch Anwendung der sin-Operation auf $\delta = (a + b) + c$ und nachfolgender Richtungsmultiplikation mit α^0 . Bei der Berechnung von δ und γ ist also zu beachten, daß die Klammern in $\delta = a + b + c$ so gesetzt werden, daß die dem gesuchten Winkel nicht anliegenden Seiten in Klammern eingeschlossen werden. — Ähnlich läßt sich verfahren bei beliebigen Polygonen.

Die Verwendung der beschriebenen Kugelvektoren ist auf Fälle der vorstehenden Art keineswegs beschränkt. Sie erweisen ihre Nützlichkeit z. B. auch bei Fragen der analytischen sphärischen Geometrie. Auf diese Fragen wird in einer späteren Arbeit gesondert eingegangen werden.

Elmshorn.

H. Athen.

BUCHBESPRECHUNGEN

Pickert, Einführung in die höhere Algebra. (Studia Mathematica — Math. Lehrbücher Bd. VII.) 298 S. Göttingen 1951. Vandenhoeck & Ruprecht. Preis brosch. 12,80; geb. 14,80 DM.

Eingeordnet in den Begriff der algebraischen Struktur, werden die wichtigsten Grundbegriffe der modernen Algebra entwickelt und bis zu den Bewertungen von Körpern fortgeführt. Geschickt ist die Zusammenstellung der einem jeden Paragraphen hinzugefügten Aufgaben, die nicht nur den Zweck der Einübung des jeweils vorausgegangenen Stoffes dienen, sondern dem Leser auch zusätzliches Wissen und die Einsicht in weitere Zusammenhänge vermitteln sollen. So entsteht im ganzen ein klares und trotz des knappen Raumes abgerundetes Bild von der modernen algebraischen Forschung.

Nur in einem erscheint mir die Auffassung des Verfassers reichlich optimistisch: daß der Studierende nach dem zweiten Semester bereits der geeignete und berufene Leser dieses Werkes sei. Für ihn besteht die Gefahr, den hohen Allgemeinheitsgrad als bloßen Formalismus zu nehmen, weil er nicht zu erkennen vermag, daß es sich um die Zwangsläufigkeit geschichtlich notwendig fortschreitenden Formalisierens handelt. Erst auf der Grundlage bestimmter algebraischer Kenntnisse kann der Wert des vorliegenden Buches voll ausgeschöpft werden.

Dresden.

Draeger.

Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung. Unter Mitwirkung von L. Prandtl, W. Tollmien, G. Vogelpohl. Herausgegeben von A. Betz. Selbstverlag Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Göttingen.

Nr. 1. A. Betz, Zur Einführung. — J. Rotta, Über die Theorie der turbulenten Grenzschichten. 54 S. mit 10 Abb. Göttingen 1950. Preis brosch. 4,— DM.

Nr. 2. H. Himmelskamp, Profiluntersuchungen an einem umlaufenden Propeller. 38 S. mit 59 Abb. Göttingen 1950. Preis brosch. 8,— DM.

Um eine Möglichkeit zu schaffen, geeignete Arbeiten größeren Umfangs in der für spezielle Interessenten erwünschten Ausführlichkeit zu veröffentlichen, ohne die bestehenden Zeitschriften allzusehr zu überlasten, hat sich der Direktor des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung, Prof. Betz, entschlossen, solche neuere Arbeiten aus seinem Institut, sowie einzelne ältere, nicht zugängliche Arbeiten in dem preiswerten Rotaprintverfahren zu drucken und in zwangloser Folge herauszugeben.

Die Arbeit von Rotta gibt an Hand früherer und eigener neuer Überlegungen und Rechnungen, sowie vorhandener Messungen einen schönen Überblick über das, was man heute über die turbulenten Grenzschichten aussagen kann, und welche Meßreihen erforderlich erscheinen, um Näherungsverfahren für die Berechnung turbulenter Grenzschichten zu entwickeln.

Im besonderen wird nachgewiesen, daß auch bei turbulenten Grenzschichten, wie bei den laminaren, „ähnliche“ Lösungen existieren, bei denen das Geschwindigkeitsprofil längs der Wand nur affin verzerrt wird. Für diese ähnlichen Lösungen werden dann unter Zugrundelegung vorliegenden Versuchsmaterials Näherungsrechnungen durchgeführt.

In der Praxis hat sich gezeigt, daß eine Übertragung von Eigenschaften feststehender Gitter auf Laufradgitter recht unsichere Ergebnisse liefert. Insbesondere treten am umlaufenden Profil erhöhte Auftriebsbeiwerte auf, die durch die Rotation bedingt sein müssen. Um hier zuverlässige Rechnungsgrundlagen zu schaffen, hat Himmelskamp Druckverteilungsmessungen an einem Blatt eines vereinfachten Gebläselaufrades angestellt und sie mit entsprechenden Ergebnissen in ebener Strömung verglichen. Außerdem wurde an einigen Punkten des Blattes die Reibungsschicht ausgemessen und damit ein näherer Einblick in die Vorgänge einer rotierenden Reibungsschicht gewonnen.

Diese, in zahlreichen Kurventafeln niedergelegten Messungsergebnisse dürfen als ein wertvoller experimenteller Beitrag zur Auffüllung der Lücke in den Rechnungsgrundlagen bezeichnet werden, die noch für die Berechnung von Laufradgittern besteht.

Weilburg a. d. Lahn.

L. Schiller.

Dr. phil. Dr. Ing. e. h. Werner Schmeidler (vorm. o. Prof. a. d. Technischen Hochschule Berlin), Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Bd. I: Lineare Integralgleichungen. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 22.) VII u. 611 S. Leipzig 1950. Akademische Verlagsgesellschaft. Preis geb. 38,— DM.

Das vorliegende Werk ist die erste deutsche lehrbuchmäßige Gesamtdarstellung der Theorie der Integralgleichungen. Es füllt in mustergültiger Weise die bisher zwischen den bekannten guten Einführungen und der Originalliteratur klaffende Lücke.

Charakteristisch für das Buch ist die durchlaufende Benutzung der Hilbertschen Methode der Koordinatenfunktionen — selbstverständlich in moderner

Fassung. Dadurch wird der umfangreiche Stoff einheitlich zusammengefaßt und gleichzeitig eine organische Verbindung zwischen den Integralgleichungen 1., 2. und 3. Art hergestellt. Der Verfasser konnte hierbei — insbesondere für die Integralgleichungen 1. Art — auch neue eigene Ergebnisse benutzen. In und neben dieser grundlegenden Darstellung der Theorie finden auch die wichtigsten andersartigen Ansätze und Verfahren ergänzend und abrundend ihren Platz. Einen Einblick in den reichhaltigen Inhalt sollen einige Stichworte aus dem Inhaltsverzeichnis vermitteln.

Theorie der Integralgleichungen 1. Art, dazu spezielle Formen wie Fouriertransformationen und Verwandtes, Volterra'sche Gleichungen, Beispiele und praktische Lösungsverfahren. Theorie der Integralgleichungen 2. Art, Volterra'scher Typ, quadratisch integrable Kerne einschl. der Fredholm'schen Theorie, die Extremwerteigenschaften von Eigenwerten, der Zusammenhang mit Differentialgleichungen, Lösungsverfahren, singuläre Kerne einschl. der Carleman'schen Theorie, Integralgleichungen 3. Art. Ein Anhang behandelt unendliche Gleichungssysteme.

Etwa 100 sorgfältig durchgeführte Beispiele beleben nicht nur die theoretischen Untersuchungen, sondern werden zusammen mit zahlreichen Abschnitten über numerische Lösungsmethoden auch den angewandten Mathematiker bei seiner Arbeit unterstützen.

In der Darstellung bestehen zahlreiche Parallelen zu den nun schon bekannten „Vorträgen über Determinanten und Matrizen in Physik und Technik“ des Verfassers [Besprechung in dieser Z. Bd. 29 (1949) S. 287]. Ebenso wie dort werden nur die bei Hochschulingenieuren üblichen Vorkenntnisse und einige Übung im mathematischen Denken vorausgesetzt. Notwendige Ergänzungen hierzu (Lebesguesche und Stieltjes'sche Integrale, über Orthogonalsysteme und Bilinearformen) bietet ein besonderer Anhang.

Mit seinem reichhaltigen Inhalt wird das Buch in kürzester Zeit jedem, der sich mit Integralgleichungen befassen will, unentbehrlich sein. Seine Benutzung als Nachschlagewerk wird durch die übersichtliche Zusammenfassung der Einzelresultate zu Sätzen, durch ein Verzeichnis aller behandelten Beispiele sowie durch einen bis etwa 1944 reichenden Literaturnachweis erleichtert.

Dresden.

N. J. Lehmann.

Dr. J. Horn (ehem. o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Darmstadt), Partielle Differentialgleichungen. (Göschens Lehrbücherei, Gr. I, Bd. 14.) Vierte unveränderte Auflage, 228 S. m. 8 Abb. Berlin 1949. Walter de Gruyter & Co. Preis 14,— DM.

Allgemein wird begrüßt werden, daß das seit längerer Zeit vergriffene Buch des vor einigen Jahren verstorbenen Prof. Horn wieder zu haben ist. Die Neuauflage ist ein unveränderter Abdruck der dritten, die wiederum bis auf das ergänzte Literaturverzeichnis im Wesentlichen mit der 1929 erschienenen zweiten übereinstimmt. Diese wurde in Bd. 10, S. 421/22 dieser Zeitschrift von Iglisch besprochen. Das didaktisch geschickt aufgebaute Buch wird wie bisher gern benutzt werden.

Dresden.

Willers.

W. Lietzmann (Prof. a. d. Univ. Göttingen), Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. 7. neubearbeitete Auflage. 276 S. mit 171 Abb. und 8 Tafeln. Göttingen 1950. Vandenhoeck u. Ruprecht. Preis geb. 11,80 DM.

Die vorliegende siebente Auflage des bekannten Buches ist wieder einer gründlichen Überarbeitung

unterzogen; manches Neue ist hinzugefügt und, um den Umfang nicht wesentlich zu ändern, anderes fortgelassen. Die große Fülle des außerordentlich anregenden Stoffes ordnet es in drei Abschnitte „Allerlei Unterhaltungsmathematik“, „Von den Zahlen“ und „Von den geometrischen Formen“, und bringt darin das Interessanteste aus einer Reihe von Einzelveröffentlichungen aber auch viel Neues. Das Buch wird auch in der neuen Auflage viele Freunde finden; insbesondere werden die Lehrer sein Wiedererscheinen begrüßen, da sie darin Vieles finden, das ihnen die Möglichkeit gibt, ihren Unterricht zu beleben und interessant zu gestalten.

Dresden.

Willers.

Josef Lense (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule München), Vom Wesen der Mathematik und ihren Grundlagen. 68 S. München 1949. Leibniz-Verlag.

Eine faßlich und klar geschriebene Broschüre, die auf geringem Raume einen guten Einblick vermittelt. Das gilt in besonderem Maße von dem kurzen Abschnitt über den mathematischen Intuitionismus, dessen Wesen sehr anschaulich klar gemacht wird.

Am ausführlichsten werden Fragen der Mengenlehre und der Logistik behandelt. Das ist deshalb bedauerlich, weil dadurch aktuellere das Wesen und die Grundlagen der Mathematik betr. Probleme überhaupt nicht zur Sprache kommen. Der Abschnitt über das Anwendbarkeitsproblem ist zu inhaltsarm, und die Wahrscheinlichkeit, die dabei gestreift wird, ist gerade heute auch ein intern mathematisches Problem.

Dresden.

Draeger.

Dr. H. Küstner, Fünfstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und der Winkelfunktionen bei dezimal geteiltem Altgrad. VI + 157 S. Berlin/Leipzig 1950. Verlag Volk und Wissen.

Die vorliegenden fünfstelligen Tafeln sind für den Gebrauch an Ingenieurschulen bestimmt. Sie enthalten daher außer den üblichen übersichtlich angeordneten mathematischen Tafeln umfangreiche physikalische und vor allen technische Tabellen für Maschinenbau, Hoch- und Tiefbau und Elektrotechnik. Wünschenswert wäre, daß in einer Neuauflage die Bereiche, in denen lineare Interpolation nicht erlaubt ist, genau bezeichnet würden.

Dresden.

Willers.

Dr.-Ing., Dr.-Ing. e. h. R. Grammel (Prof. a. d. Techn. Hochschule Stuttgart). Der Kreisel, seine Theorie und Anwendungen. Zweite, neubearbeitete Auflage. Zweiter Band. Die Anwendungen des Kreisels. VI + 268 S. mit 133 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis: geh. 30,— DM., geb. 33,— DM.

Es ist außerordentlich erfreulich, daß so bald nach Erscheinen des ersten Bandes der zweite das Werk zum Abschluß bringt. Aufgabe dieses Bandes ist, zu zeigen, wie die im ersten abgeleiteten Sätze bei Behandlung des Kreisels in Maschinen bzw. des Kreisels als Maschine angewendet werden. Dieser Band ist vielleicht noch stärker umgearbeitet als der erste. Er berücksichtigt die Entwicklung der Kreiselgeräte bis zur Gegenwart, und wenn auch nicht alle Konstruktionen im einzelnen darin beschrieben werden — das kann nicht die Aufgabe eines solchen Buches sein —, so hat doch der Verf. alle wesentlichen Anwendungsgebiete berücksichtigt. Er teilt den Stoff in drei Abschnitte. Der erste behandelt die Kreiselwirkung der Radsätze z. B. in Kollergängen und Pendelmühlen, bei stationär laufenden Radsätzen — insbesondere werden hier die kritischen Drehzahlen von Rotoren untersucht — und in Fahrzeugen, Schiffen und Flugzeugen. Der zweite, umfangreichste Abschnitt ist dem Hauptanwendungsgebiet des Krei-

sels, den Kreiselgeräten, gewidmet, bei denen in der Hauptsache der schnelllaufende symmetrische Kreisel benutzt wird. Zunächst werden Geräte mit Kompaßkreisel und besonders der Kompaßkreisel selbst betrachtet, ferner der als künstlicher Horizont benutzte Pendelkreisel mit vertikaler Achse und der als Kursanzeiger dienende Wende- und Lagekreisel mit mehr oder weniger waagerechter Achse und zum Abschluß Kreisel, die als Differentiatoren, Integratoren oder Regler dienen. In diesem Abschnitt wird auch besonders auf die Störungsfehler eingegangen. Der letzte kürzere Abschnitt beschäftigt sich mit unmittelbaren Stabilisatoren, also mit Richtkreisel, wie es Planeten und rotierende Langgeschosse sind, mit Stützkreisen, durch deren Einbau labile Körper stabil werden (Einschielenbahn) und mit Dämpfungskreisen, die die Schwingungen an sich stabiler Systeme abschwächen (Schiffskreisel).

Die beiden Bände des Werkes geben eine gut lesbare, umfassende Darstellung, die in gleicher Weise Theorie und Anwendung eines der interessantesten Gebiete der Mechanik berücksichtigt. Möge das Buch, das sich in gleicher Weise an Mathematiker, Physiker und Ingenieure wendet, von vielen durchgearbeitet werden.

Dresden.

Willers.

Tables d'Intérêts et d'Annuités éditées par le Crédit communal de Belgique. 163 S. Brüssel 1950.

Aus Anlaß seines neunzigjährigen Bestehens hat der Crédit communal de Belgique diese Tafeln herausgegeben, die leider im Handel nicht zu haben sind. Die zum Teil auf 19 Stellen mit Maschinen berechneten Werte sind auf acht Stellen abgerundet hier abgedruckt und zwar für einen Zinsfuß von $p = 2$ bis 8% mit einem Argumentschritt von $0,05\%$, so daß sich allgemein eine Interpolation erübrigen wird. In den ersten fünf Tafeln läuft n von 1 bis 60. Es sind aufgezichnet in Tafel I: $(1+i)^n = u^n$ ($i = p/100$), in Tafel II: der reziproke Wert davon $1/(1+i)^n = v^n$, in Tafel III: $a_{\overline{n}|} = (u^n - 1)/i$, in Tafel IV: $s_{\overline{n}|} = (1 - v^n)/i$, in Tafel V: der reziproke Wert davon $1/a_{\overline{n}|} = P_{\overline{n}|} + i$, in Tafel VI: $u^{1/12}$, $u^{1/4}$ und $u^{1/2}$, in Tafel VII: $j_{(12)} = 12(u^{1/12} - 1)$, $j_{(4)} = 4(u^{1/4} - 1)$ und $j_{(2)} = 2(u^{1/2} - 1)$, in Tafel VIII: $i: j_{(12)}$, $i: j_{(4)}$ und $i: j_{(2)}$, und endlich in Tafel IX: das Reziproke dieser Werte. Den einzelnen Tafeln sind zur Erläuterung ihrer Anwendung Beispiele beigegeben. Drei weitere zusammengesetztere Anwendungsbeispiele sind ausführlich am Schluß behandelt. Ausstattung und Druck dieser Tafeln ist ausgezeichnet.

Dresden.

Willers.

Centre Belge de Recherches Mathématiques, Colloque de Géométrie algébrique. Tenn à Liège les 19, 20 et 21 Décembre 1949. 195 S. Liège et Paris 1950. George Thone, Masson & Cie, Preis 200 fr. belg., 1400 fr. français.

Bericht über ein internationales Colloquium vom 19.—21. Dez. 1949 in Lüttich. Es hatte den Zweck einer Aussprache der Vertreter der verschiedenen Richtungen und Methoden in der algebraischen Geometrie. Im einleitenden Vortrage sprach F. Severi (Rom) über die italienischen Methoden und Probleme. Er untersucht dabei sehr tiefgründig die Legende von der fehlenden Strenge der italienischen algebraischen Geometrie; seine Gedanken gehen in ihrer Bedeutung weit über den Rahmen seines engeren Fachgebietes hinaus. Er unterscheidet zwischen substantieller und formeller Strenge und demonstriert, was er im Sinn hat, an zahlreichen Einzelproblemen.

In den Vorträgen von Dubreil, v. d. Waerden, Samuel kam dann die idealtheoretische

Richtung der algebraischen Geometrie zu Wort. Châtelet und Libois sprachen über die enge Verbindung und gegenseitige Befruchtung von Geometrie und Algebra im allgemeinen, B. Segre über die Beziehungen zu Zahlentheorie (diophantische Gleichungen), Bureau über Anwendungen auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Godeaux gab Anwendungen seiner Theorie der zyklischen Involutionen auf einer algebraischen Fläche.

Das Colloquium und der vorliegende Bericht ist eine bedeutsame Tat der Verständigung und der Synthese der verschiedenen algebro-geometrischen Schulen. Dem fernerstehenden Mathematiker vermittelt er einen lehrreichen Einblick in Geist, Methoden und Fragen der gegenwärtigen algebraischen Geometrie.

Dresden.

Ott-Heinrich Keller.

Dr. G. Bol, Elemente der Analytischen Geometrie. I. Gerade Linie und Ebene, Kreise und Kugeln, Kegelschnitte, algebraische Kurven. 232 S. mit 103 Abb. Göttingen 1948. II. Lineare, insbes. affine Transformationen, Determinanten, Matrizen, Gruppen. 156 S. mit 23 Abb. Göttingen 1949. Vandenhoeck u. Ruprecht. Preis kart. 14,— bzw. 8,80 DM, geb. 16,50 bzw. 10,50 DM.

Das Buch ist aus Freiburger Vorlesungen entstanden. Der Stoff ist so ausgewählt und angeordnet, wie es den Bedürfnissen eines Studierenden der Mathematik oder Physik des ersten Semesters entspricht. Die Methoden sind bewußt elementar und ungekünstelt gehalten. Verf. führt zunächst den Vektorbegriff ein und baut damit parallel die Geometrie der Ebene und des Raumes auf. Er geht überall vom Anschaulichen aus und entwickelt allmählich die übergeordneten Begriffe, wenn sich das Bedürfnis dazu eingestellt hat, und auch nur in der gerade nötigen Allgemeinheit und unter Verdeutlichung durch geschickt ausgewählte Beispiele. Durch Strenge und Gründlichkeit der Begriffsbildungen, durch Hinweise an allen passenden Stellen ist dabei der spätere Ausbau der algebraischen und axiomatischen Methoden vorbereitet. Jedem Paragraphen sind zahlreiche Übungsbeispiele beigegeben. Sehr sorgfältig und ausführlich sind die historischen Anmerkungen. Einem durchschnittlich begabten Anfänger wird das Studium des Buches keine besonderen Schwierigkeiten bereiten, und er wird nach gründlichem Durcharbeiten bemerken, welch tragfähige Grundlage er gelegt und welche sichere Beherrschung der Methoden er erworben hat.

Ott-Heinrich Keller.

Heyde, H. (Prof. a. d. Humboldt-Universität Berlin): Mechanik für Ingenieure. Band I: Statik, Dynamik. (Teubners Fachbücher für Maschinenbau und Elektrotechnik.) X + 322 S. mit 317 Abb. Leipzig 1950. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 13,40 DM.

Die starke Nachfrage nach guter Literatur über technische Mechanik, die sich nach Kriegsende bemerkbar machte, hat inzwischen durch verschiedene hier besprochene Neuauflagen und Neuerscheinungen wesentlich nachgelassen. Das vorliegende Buch gehört nicht zur wissenschaftlich-formalistischen, sondern zur rein ingenieurmäßigen Mechanik-Literatur. Es kam dem Verf. offenbar in erster Linie auf die Darstellung der einfachen Anwendungsformeln nach Art eines Taschenbuches an, wobei man den Verzicht auf gewisse theoretische Grundgedanken nachteilig empfindet. Während die Darstellung des ersten Teiles (Statik) noch Einfachheit und Klarheit aufweist, macht sich im zweiten Teil (Dynamik) das Fehlen analytischer Bestandteile der Mechanik störend bemerkbar.

So werden die Schwingungsprobleme ohne Differentialgleichung als Beispiel der rein kinematischen Beziehungen des Bewegungsvorganges behandelt. Dadurch verliert der Leser das Gefühl für die Kausalität und die Reihenfolge der beim deduktiven Denken zur Anwendung kommenden Gesetze. Die angenommene Wegzeitfunktion und ihre Ableitung werden gewissermaßen a priori als „Bewegungsgesetz“ und „Geschwindigkeitsgesetz“ deklariert, während die dynamische Grundgleichung ganz in den Hintergrund tritt (das

D'Alembertsche Prinzip bleibt ignoriert). Durch eine solche Darstellungsart wird vielen Lesern der Weg zur höheren Mechanik von vornherein verschüttet; denn sie werden nicht an die in der Mechanik erforderliche besondere Art des deduktiven Denkens gewöhnt. Die Erziehung dazu muß aber als eine der wesentlichsten Aufgaben aller Mechanik-Lehrbücher angesehen werden.

Dresden.

H. Neuber.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Dr. phil. A. Duschek (o. Prof. a. d. techn. Hochschule TH. Wien), *Vorlesungen über höhere Mathematik*, 2. Band, VI + 386 S. mit 125 Abb. Wien 1950. Springer-Verlag. Geh. 26,— DM., geb. 29,— DM.

Dr.-Ing. R. C. Oldenbourg und **Dr.-Ing. H. Sartorius**, *Dynamik selbsttätiger Regelungen*. Band I. Allgem. und mathem. Grundlagen. Stetige und unstetige Regelungen. Nichtlinearitäten. 2. Aufl. 258 S. mit 112 Abb. und 1 Tafel. München 1951. Verlag R. Oldenbourg. Preis geb. 26,— DM.

H. W. v. Guérard (Direktor des Statist. Amtes der Stadt Düsseldorf), *Über Zahlen und Diagramme zur Messung des Verkehrs* (Wissensch. Veröffentlichungen und Tagungsberichte des Minist. für Wirtschaft und Verkehr des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 12.) 37 S. mit 4 Abb. Düsseldorf 1950. Droste-Verlag. Preis 2,50 DM.

A. Jante (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden), *Leitfaden der technischen Thermodynamik*. (Teubners Fachbücher für Maschinenbau und Elektrotechnik.) VI + 146 S. m. 153 Abb. Leipzig 1950. Teubners Verlagsgesellschaft. Preis geb. 9,60 DM.

P. Crantz, *Sphärische Trigonometrie*. Bearb. von **Dr. M. Hauptmann**. (Mathematisch-physikalische Bibliothek, Reihe II, 7.) 4. Aufl., 112 S. m. 76 Fig. und 1 Nomogramm. Leipzig 1950. B. G. Teubners Verlagsgesellschaft. Preis kart. 4,20 DM.

Dr. phil. habil. W. Gebelein (Landshut) und **Dr. med. H.-J. Heite** (Münster), *Statistische Urteilsbildung*. Erläutert an Beispielen aus Medizin und Biologie. Mit einem Geleitwort von **Prof. Dr. med. C. Moncorps** (Münster). 192 S. mit 50 Abb. und 20 Beispielen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951. Springer-Verlag. Preis: brosch. 13,60 DM.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

NACHRICHTEN

Gießen: Professor Rolf Nevanlinna, Helsingfors und Zürich, wurde das Ehrendoktorat der Naturwissenschaften von der Naturwiss. Fakultät der Justus-Liebig-Hochschule Gießen verliehen.

Ende Februar 1951 fand im Mathematischen Institut der Justus-Liebig-Hochschule Gießen eine funktionentheoretische Arbeitstagung statt, bei der vor allem jüngeren Funktionentheoretikern aus Karls-

ruhe, Marburg, Münster, Zürich und Gießen Gelegenheit zu gründlichem Kennenlernen neuester Arbeiten und zum Bericht über eigene Forschungen gegeben war.

Hannover: Am 11. Febr. 1951 verstarb der a. o. Professor an der T. H. Hannover, **Dr. Conrad Ludwig**.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zu W. Schmidt, Untersuchungen des für den schiefen Stoß elastischer Kugeln gültigen Reflektionsaxioms und einige Folgerungen daraus. Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 182 bis 184.

Herr W. Schmidt hat in den kleinen Mitteilungen dieser Zeitschrift eine Note mit dem Titel veröffentlicht: Untersuchungen des für den schiefen Stoß elastischer Kugeln gültigen Reflexionsaxioms und einige Folgerungen daraus. Er behauptet mit Recht, daß die oft angenommene Gleichheit von Einfallswinkel und Ausfallswinkel im allgemeinen falsch ist. Das steht auch schon in der Lösung der Aufgabe, die man in meiner „Elementaren Mechanik“ unter Nr. 298 in § 52, S. 448 findet und zwar wesentlich allgemeiner, nämlich unter Einbeziehung der Gleitreibung, die Herr Schmidt ausschließen will.

Doch unterscheiden sich unsere Betrachtungen weiterhin in einem wesentlichen Punkt. Herr Schmidt

hat noch eine zweite Hypothese für die tangentielle Komponente des Stoßes und somit eine zweite Konstante q mit $0 \leq q^2 \leq 1$. Das würde eine Gleichung zu viel geben, wenn nicht Herr Schmidt von der Bedingung absähe, daß die tangentielle Geschwindigkeit am Ende null sein muß, wie es der ausdrücklich von ihm formulierten Voraussetzungen entspricht, daß nur Haftreibung, keine Gleitreibung vorhanden sein soll. Vergleicht man unsere Resultate, so stimmen sie überein, wenn man $q = 0$ setzt.

Aber meine Theorie ist deshalb nicht ein Sonderfall von der des Herrn Schmidt. Ich mußte diese zunächst für falsch halten, da sie etwas zu wenig und etwas zu viel enthält. Aber ich finde jetzt, daß sie doch ihren Sinn hat, sie behandelt nur ein anderes Problem.

Wenn man den Stoß einer Kugel gegen eine feste Wand behandelt, betrachtet man diese in der Regel, so wie ich, als makroskopisch eben. Dann hat man

bei Annahme von Haftreibung die Bedingung, daß die tangentiale Geschwindigkeit zum Schluß null sei, d. h., daß in der Bezeichnung des Herrn Schmidt

$$v \sin B - \frac{w}{c} = 0 \quad \dots \quad (a)$$

sein muß. Dann aber darf nur eine Stoßhypothese gemacht werden, etwa ebenso wie bei Herrn Schmidt

$$v \cos B = k u \cos A \quad \dots \quad (8).$$

Darin und in der Impulsleichung

$$v \sin B + w c = u \sin A \quad \dots \quad (2)$$

stimmen wir überein.

(2), (8) und (a) genügen, um v , B und w zu berechnen. Es ergeben sich

$$v = u \sqrt{k^2 \cos^2 A + \frac{1}{(1+c^2)^2} \sin^2 A},$$

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} A \cdot \frac{1}{k(1+c^2)},$$

$$w = u \sin A \frac{1}{1+c^2}.$$

Wegen der Bedingung der Haftreibung kommt noch eine Ungleichheit hinzu, die wir nicht hinschreiben wollen.

Statt (a) hat Herr Schmidt die zweite Stoßhypothese

$$v \sin B - \frac{w}{c} = -q u \sin A \quad \dots \quad (b),$$

ohne sie explizit hinzuschreiben. (a) ist zwar mathematisch ein Sonderfall von (b), hat aber einen ganz anderen Charakter. Sie ist kinematischer Natur, lediglich der Voraussetzung des Haftens entspringend, während (b) eine Stoßhypothese ist.

Das braucht nun doch nicht falsch zu sein, wenn man sich die Wand und vielleicht auch die Kugel als so rauh vorstellt, daß sie sich beim Stoß ineinander verhaken, man also mit der Annahme einer einheitlichen wohlbestimmten Berührungsfläche nicht mehr auskommt und so veranlaßt sein kann, der Ungenauigkeit des Problems entsprechend eine zweite Stoßhypothese einzuführen, den tangentialen Stoß also gesondert zu betrachten. Man hat gewissermaßen zwei Wände. Setzt man nun q nicht gleich null, so muß die Annahme der Haftreibung fallen, denn die Kugel verläßt die Wand mit einer von null verschiedenen Geschwindigkeit, welche der rechten Seite von (b) entspricht. Wie sie das freilich bei der Verzahnung fertig bekommt, ist noch eine Frage. Aber immerhin mag für dieses undurchsichtige Problem die Betrachtung des Herrn Schmidt Wert besitzen: zur Anpassung an die Wirklichkeit steht ihm ja noch das q frei.

Im Grunde behandelt also Herr Schmidt ein ganz anderes Problem als das, was man sich unter dem Stoß gegen eine feste Wand vorzustellen pflegt. Offenbar versteht auch Herr Schmidt unter Haftreibung etwas anderes als man es in der Regel tut. Er meint wohl, daß die tangentiale Geschwindigkeit das Zeichen wechselt und also auch einen Augenblick null ist.

Landshut (Bayern).

G. H a m e l.

Erwiderung

Die freundliche Zuschrift von Herrn Prof. Dr. G. H a m e l gibt mir Gelegenheit zu notwendigen Ergänzungen meines Aufsatzes. Erst nach dessen Veröffentlichung wurden mir Schriftquellen zugänglich,

die im Gegensatz zu den apodiktischen, aber falschen Aussagen über das Reflexionsaxiom beim schiefen Stoß stehen, bei denen aber trotzdem für den allgemeinen Fall Ungleichungen nicht entbehrt werden können und die zudem durchweg die Realität der tangential wirkenden Federkraft außer Ansatz lassen. Daß ich entgegen der Ansicht von Herrn Prof. Dr. G. H a m e l in meinen Betrachtungen die Gleitreibung nicht ausschließe, folgt zwingend aus dem Schlußsatz meiner Abhandlung, in dem ich mich der Fiktion eines rein körperlichen Stoßvorganges bei der Reflexion des Lichtes bediene. Bei dieser Fiktion wird also $q = -1$. Es handelt sich hierbei, wie betont, um den Grenzfall völlig reibungsfreien Gleitens — selbstverständlich also auch völlig haftfreien Gleitens —, wie er vielfach fälschlich noch heute im Fachschrifttum zur Erklärung des Reflexionsaxioms beim schiefen Stoß einer Kugel gegen eine Wand benutzt wird. Unter Haftreibung verstehe ich mit Herrn Prof. Dr. G. H a m e l genau das gleiche, wie z. B. in Sommerfeld „Mechanik“ 1944, S. 76ff. erläutert. Gerade von hier aus wird aber der Unterschied der beiderseitigen Betrachtungen erkennbar. Wie in meinem Aufsatz, wenn auch kurz und unvollkommen, erläutert, superponiere ich die Kraft der Haftreibung sowohl wie auch die der Gleitreibung der tangential wirkenden Federkraft, die sich entsprechend den zu Beginn meines Aufsatzes erläuterten Versuchsergebnissen bemerkbar macht. Zusammenfassend sind die beim schiefen Stoß in ihrer Gesamtheit wirkenden Kräfte, insbesondere also Haftreibung, gleitende Reibung und Federkraft, ihrem Ursprung nach so verwickelt zusammengesetzt und miteinander vermischt, daß sie noch weniger exakter Analyse zugänglich sind wie diejenigen beim Zentralstoß. Um so empfehlenswerter ist in Analogie zur Newtonschen Stoßzahl k , die sich ausschließlich auf die Normalkomponente des Stoßes bezieht, die Einführung der in meinem Aufsatz vorgeschlagenen Stoßzahl q für die Tangentialkomponente. Übrigens schließt k offensichtlich auch Reibungsvorgänge in sich ein; diese Reibungskräfte entstehen beim Aneinandergleiten der sich gegenseitig verformenden Stoßflächen, heben sich aber in diesem Fall in ihrer richtungändernden dynamischen Wirkung sicher weitgehend gegeneinander auf. Selbstverständlich sind ebenso wie $q = -1$ (reibungsfreies, daher auch federkraftfreies Aneinandergleiten) auch die Werte $q = +1$ (verlustfreies, gleitfreies Haften in Verbindung mit verlustfreier tangentialer Federkraft) und $q = 0$ (verlustfreies, gleitfreies Haften ohne Wirksamwerden der tangentialen Federkraft) nur Idealfälle. In Wirklichkeit ist $+1 > q > -1$ nur empirisch zu ermitteln, genau wie k ; sicherlich ist q auch abhängig von d , u und A , genau wie erwiesenermaßen auch k von u abhängig ist, q läßt sich genau wie k fallweise experimentell einwandfrei ermitteln. Für die mathematische Behandlung der Vorgänge sehe ich nach wie vor in der eleganten Poincaré-Methode (Einführung der reduzierten Massen) das einfachste, anschaulichste und aufschlußreichste Verfahren. Wenn man die Vorgänge beim schiefen Stoß genauer untersuchen will, bietet die vorgeschlagene Tangentialstoßzahl q m. E. eine ebenso wertvolle Stütze wie k , klärt die Zusammenhänge und ist eine notwendige Ergänzung der analytischen Hilfsmittel für die heute immer noch recht problematischen Vorgänge beim schiefen Stoß, allerdings keine hinreichende, sofern, wie im Aufsatz angedeutet, die Schwerkraft und die Stoßwirkung der Gezeiten in die Betrachtungen mit einbezogen wird.

Rheydt.

Wolfgang Schmidt.